

ORSAY
Série A
N° d'ordre :
791

T H E S E

PRESENTEE

A LA FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY
UNIVERSITE DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Philippe BERNA

FORMULATION COHERENTE DE LA THEORIE HETEROGENE
EN APPROXIMATION DIPOLAIRE

Soutenue le 24 mai 1971, devant la Commission d'Examen

MM. HOROWITZ

Président

BUSSAC
BENOIST

Examineurs

ORSAY

Série A

N° d'ordre :

791

T H E S E

PRESENTÉE

**A LA FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY
UNIVERSITE DE PARIS**

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Philippe BERNA

**FORMULATION COHERENTE DE LA THEORIE HETEROGENE
EN APPROXIMATION DIPOLAIRE**

Soutenue le 24 mai 1971, devant la Commission d'Examen

MM. HOROWITZ

Président

BUSSAC

BENOIST

Examineurs



TABLE DES MATIERES

	pages
<u>INTRODUCTION</u>	I
<u>SOMMAIRE</u>	VI
<u>CHAPITRE I - THEOREME DE SEPARATION</u>	1
1 - Enoncé du problème	1
2 - Démonstration	3
3 - Transposition du théorème de séparation en théorie multigroupe	4
4 - Discussion	7
<u>CHAPITRE II - APPLICATION DU THEOREME DE SEPARATION AU CALCUL D'UN REACTEUR HETEROGENE DE HAUTEUR INFINIE EN THEORIE MONOCINETIQUE</u>	9
Section A - Développement en série de Fourier des sources de compensation autour de l'axe du canal k	9
Section B - Introduction et calcul des paramètres hétérogènes	17
B.1 Expression du flux asymptotique dans le modérateur de la géométrie k	17
B.2 Calcul des paramètres hétérogènes polaires	20
B.2a Calcul de γ_u	20
B.2b Calcul de $\tilde{\gamma}$	21
B.3 Calcul des paramètres hétérogènes dipolaires	26
B.3a Définition des probabilités fictives	26
B.3b Calcul de θ_u	30
B.3c Calcul de β	31

Section C - Recherche de la condition de criticité du réacteur	43
C.1 Relations caractéristiques du canal k	43
C.1a Expression de σ_{k0} en fonction de $\phi_{ok}(\vec{r}_k)$	43
C.1b Expression de $\vec{\nabla}\sigma_{k1}$ en fonction de $\vec{\nabla}\phi_{ok}(\vec{r}_k)$	47
C.2 Relations géométriques entre les canaux	51
C.3 Condition de criticité du réacteur	52
 <u>CHAPITRE III - GENERALISATION A LA THEORIE MULTIGROUPE</u>	 55
Section A - Couplage entre les différents groupes occasionné par le ralentissement dans le modérateur	55
Section B - Développement en série de Fourier des sources de compensation autour de l'axe du canal k	69
Section C - Contribution des sources contenues dans le canal k au niveau du groupe g	74
Section D - Recherche de la condition de criticité du réacteur	77
D.1 Relations caractéristiques du canal k	77
D.1a Calcul de σ_{k0}^g	78
D.1b Calcul de $\vec{\nabla}\sigma_{k1}^g$	83
D.2 Relations géométriques entre les canaux	89
D.3 Condition de criticité du réacteur	89
 <u>CHAPITRE IV - CALCUL DU FLUX THERMIQUE CREE PAR UNE SOURCE DE RALENTISSEMENT A GRADIENT CONSTANT DANS UN RESEAU INFINI PERIODIQUE - RELATION ENTRE LE COEFFICIENT DE DIFFUSION RADIAL THERMIQUE ET LES PARAMETRES HETEROGENES</u>	 94
Section A - Généralités	94
Section B - Calcul du flux antisymétrique, dont dépend la formule du coefficient de diffusion radial thermique, en théorie hétérogène	97

Section C - Calcul du flux antisymétrique dont dépend la formule du coefficient de diffusion radial thermique au moyen du formalisme de calcul de cellule	111
Section D - Expression analytique du coefficient de diffusion radial thermique en fonction des paramètres hétéro- gènes	122
<u>CHAPITRE V - CORRECTIONS DUES A L'ANISOTROPIE DU CHOC DANS LE MODERATEUR ET CORRECTIONS DUES AUX FUITES AXIALES</u>	132
Section A - Corrections dues à l'anisotropie du choc dans le modérateur	132
Section B - Corrections dues aux fuites axiales	134
<u>CHAPITRE VI - RESULTATS NUMERIQUES - COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE</u>	144
Section A - Présentation du code hétérogène dipolaire Fodith, comparaison numérique avec Rififi (code de diffusion), Hector (code sources-puits) et Podipo (code sources- puits dipolaire)	144
Section B - Comparaison avec l'expérience	161
<i>Première partie - Détermination de la réactivité</i>	161
<i>Seconde partie - Calcul du flux</i>	166
Section C - Ordre de grandeur de la correction à apporter à la formule usuelle du coefficient de diffusion de Benoist dans le groupe thermique	175
<u>CHAPITRE VII - CONCLUSION</u>	186
<u>REFERENCES</u>	187
<u>FORMULAIRE</u>	192

ANNEXES

ANNEXE A - Premiers coefficients du développement en série de Fourier de

l'expression
$$\frac{e^{-K_m \vec{u}_m \cdot (\vec{r} - \vec{r}_k)}}{\Sigma_{tm} - K_m \vec{u}_m \cdot \vec{\Omega}}$$
 en fonction de l'angle α qui amène $\vec{r} - \vec{r}_k$ sur une direction $\vec{W}$ orthogonale à l'axe du canal k .

ANNEXE B - Justification du changement de domaine d'intégration pour le calcul des intégrales figurant dans la relation (II.A.13).

ANNEXE C - Effets résultant du remplacement d'une partie d'un milieu homogène faiblement capturant par un canal comportant une cavité et un barreau absorbant.

ANNEXE D - Calcul, en cellule de rayon infini, de la probabilité $P_{uu_0}^*$ pour un neutron né isotropiquement et uniformément dans le barreau du canal d'y être capturé.

ANNEXE E - Expression du paramètre $\tilde{\gamma}$.

ANNEXE F - Calcul du facteur d'utilisation thermique d'un réseau infini périodique et de la valeur, à la frontière du canal, du rapport de la partie polaire du flux asymptotique, régnant dans le modérateur, à sa dérivée, en utilisant la nouvelle formulation hétérogène.

ANNEXE G - Relations entre les probabilités fictives.

ANNEXE H - Expression des paramètres hétérogènes dipolaires.

ANNEXE I - Expressions de P_0 et de P_1 .

ANNEXE J - Flux créé par l'introduction, dans le modérateur d'une cellule ouverte, d'une source isotrope d'intensité :

$$S(\vec{p}) = \frac{1}{4\pi} (A K_0(\kappa\rho) + \vec{B} \cdot \frac{\vec{p}}{\rho} K_1(\kappa\rho)).$$

ANNEXE K - Expression des paramètres hétérogènes en théorie multigroupe.

ANNEXE L - Une expression intégrale de $I_1(K_m \rho) \cos \alpha$.

ANNEXE M - Approximation à l'ordre deux en K_m de la formule (IV.D.16) du coefficient de diffusion radial thermique.

ANNEXE N - Expression du coefficient de diffusion de Benoist en fonction des paramètres hétérogènes lorsque l'on suppose le flux de structure fine d'ordre zéro isotrope et uniforme dans chacun des milieux de la cellule.

ANNEXE O - Première partie - Solution asymptotique de l'équation de Boltzmann dans l'hypothèse du choc linéairement anisotrope.

Seconde partie - Recherche d'une solution particulière de l'équation :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\text{grad}} v + \Sigma_{tm} v = \frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} \phi + \frac{3}{4\pi} \bar{\mu} \Sigma_{sm} \vec{j} \cdot \vec{\Omega} + \frac{e^{-\kappa} \vec{u} \cdot \vec{\rho}}{4\pi}.$$

ANNEXE P - Formule donnant l'accroissement de noirceur d'un canal en présence de fuites axiales.

ANNEXE Q - Simulation dans les calculs Rififi des réflecteurs Fodith, Hector et Podipo.

ANNEXE R - Adaptation des sorties de Coregraf aux besoins de Fodith, pour le calcul - en théorie à deux groupes - des réacteurs nucléaires modérés au graphite.

ANNEXE S - Application de la nouvelle formulation hétérogène au calcul de l'aire de migration radiale d'un réseau infini périodique carré.

ANNEXE T - Représentation schématique des réacteurs 1A1B28A1, 1C1B50B, 2D2B50D/2D2B50D, 2D3B50D/2D3B50D, 2D4B50D/2D4B50D, 2D5B50D/2D4B50D, 1E4B50B/1C1B31/1C1B50B.

ANNEXE U - Expression du rapport $\frac{\text{MAX} - \text{MIN}}{\text{MOY}}$ du flux thermique à la périphérie du barreau.

ANNEXE V - Valeur du premier terme de la formule théorique du coefficient de diffusion de Benoist lorsque tous les milieux de la cellule ont la même section efficace macroscopique totale et que le choc est isotrope.

ANNEXE W - Calcul de P_u^+ , P_c^+ et P_{-u}^+ .

ANNEXE X - Formule approchée de la correction d'anisotropie de source relative au coefficient de diffusion radial thermique.

ANNEXE Y - Calcul des intégrales $\int_c^\infty \rho f_o(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho$
 $\int_c^\infty \rho^3 f_o(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho$ et $\int_c^\infty \frac{1}{\rho} f_o(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho.$

ANNEXE Z - Calcul de la valeur du rapport de la partie polaire du flux asymptotique, régnant dans le modérateur, au courant qui en dérive, à la frontière du canal (en théorie multigroupe).

REMERCIEMENTS

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur J. HOROWITZ, qui a bien voulu m'autoriser à préparer cette thèse et m'a fait l'honneur de présider cette commission d'examen.

Ce travail a été effectué au Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, au Service de Physique Mathématique.

Je remercie très sincèrement Monsieur J. BUSSAC, Chef de ce service, de l'accueil chaleureux qu'il m'a toujours réservé et de l'intérêt qu'il a témoigné à l'égard de mon travail. Ses remarques pertinentes et encourageantes m'ont beaucoup aidé.

Je prie le Docteur P. BENOIST, qui a suivi mon travail du début à la fin, de croire à ma reconnaissance la plus vive. Je n'oublie pas que je lui dois mon initiation à la théorie du transport. Il m'a toujours fait profiter de sa précieuse expérience et particulièrement aux moments où certaines parties de cette étude restaient noyées dans l'obscurité.

A tous les deux, j'exprime ma gratitude d'avoir accepté d'être membres du jury.

J'ai eu de longues et intéressantes discussions avec le Docteur D. BLACKBURN (A.E.E.W. Winfrith) et Mr. M.J. BRIDGE (C.E.G.B.). Je les remercie vivement de m'avoir communiqué les caractéristiques de réacteurs A.G.R. expérimentaux.

La communication avant publication du rapport de Monsieur R. NAUDET sur l'analyse des formalismes hétérogènes m'a été d'un grand secours. Qu'il veuille trouver ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

Je suis également très reconnaissant au Docteur B. LAPONCHE et à Monsieur J. JOURNET pour les encouragements qu'ils m'ont toujours prodigués.

Ma gratitude va également à tous mes collègues qui m'ont amicalement apporté leur aide, en particulier à Messieurs A. HOFFMANN, M. LIVOLANT, A. KAVENOKY et surtout à M. REUSS avec qui j'ai eu de fréquents entretiens. Leurs suggestions et leurs critiques m'ont beaucoup aidé.

Les codes FODITH et PODIC ont été réalisés par Madame PILLARD, dont la disparition nous a profondément émus. Elle m'a ainsi fait bénéficier, au cours d'une longue collaboration, de sa très haute compétence. Je remercie Mademoiselle ANTERRIEU de l'aide qu'elle a apportée en matière de programmation.

Je tiens spécialement à remercier Madame KATZ de s'être occupée de la publication de ce mémoire.

Je suis redevable envers Madame SARRAZIN d'avoir su donner à ce travail compliqué une présentation particulièrement claire et soignée.

INTRODUCTION

Pour un neutron qui voyage dans le modérateur d'un réacteur nucléaire, chaque canal⁽¹⁾ avec son contenu représente deux discontinuités :

l'une concerne l'absorption et la fission,
l'autre concerne la diffusion et le ralentissement.

Il y a trois manières de traiter ces discontinuités lorsque l'on calcule un réacteur. On peut,

soit uniformiser leurs effets dans le réacteur - c'est la théorie homogène -,
soit uniformiser seulement les effets de diffusion et de ralentissement et tenir compte de la situation géométrique des discontinuités d'absorption et de fission - c'est la théorie sources-puits de FEINBERG [1] et GALANINE [2] -,
soit enfin tenir compte à la fois de la situation géométrique des discontinuités de diffusion et de ralentissement et de celle des discontinuités d'absorption et de fission - c'est la théorie hétérogène -.

C'est dans cet ordre qu'historiquement ces trois théories ont vu le jour⁽²⁾.

Nota. La théorie sources-puits est également connue sous le nom de théorie hétérogène⁽³⁾ bien qu'elle soit mixte : homogène pour les discontinuités de diffusion et de ralentissement et hétérogène pour les discontinuités d'absorption et de fission.

(1) On entend par canal l'ensemble de la cavité et du barreau.

(2) En fait une approche de la troisième théorie avait été réalisée en 1946 pour le traitement des barres de contrôle (par NORDHEIM et SCALETTAR [3]) et ce n'est qu'en 1955 que la théorie sources-puits a été proposée.

(3) Cela tient essentiellement à ce qu'avec elle soit apparu, pour la première fois le concept de la théorie hétérogène.

1 - Théorie homogène

a) Principe

La première théorie s'applique au calcul des réacteurs composés de réseaux réguliers de grandes dimensions (vis-à-vis de l'espacement des canaux). Elle s'appuie sur le fait qu'un large réseau régulier se comporte *en moyenne*, vis-à-vis des neutrons qui le traversent, comme un milieu homogène. Elle consiste à remplacer chaque réseau par une pâte homogène de mêmes propriétés neutroniques moyennes. Cela revient à lisser les discontinuités sur le volume du réseau. On calcule le réacteur comme s'il n'était composé que de zones homogènes tout en respectant à leurs frontières l'égalité du flux et du courant.

b) Performances des codes basés sur cette théorie

Les codes qui mettent cette méthode en pratique sont appelés codes homogènes. De tous les codes de calcul de réacteurs, ce sont, de loin, les plus "performants" (du point de vue de l'encombrement en machine et du temps de calcul). C'est pourquoi on les utilise de préférence à tout autre lorsqu'ils donnent des résultats satisfaisants.

c) Applications possibles

Ils conviennent pour calculer les projets de piles de puissance de grandes dimensions et pour dépouiller les expériences où l'épaisseur de chaque réseau dépasse trois à quatre mailles. Mais ils ne permettent pas le calcul correct du flux aux frontières des réseaux. Parmi eux, on trouve les codes RIFIFI, ALCI et DAIXY.

2 - Théorie sources-puits

a) Principe

La seconde théorie permet de calculer les réacteurs dont les propriétés de diffusion et de ralentissement sont macroscopiquement uniformes. Les canaux sont remplacés par des fils absorbeurs et générateurs de

neutrons (d'où le nom de la théorie), le modérateur par une pâte homogène ayant les propriétés moyennes de diffusion et de ralentissement du réacteur. Le flux est calculé comme si le milieu multiplicateur était homogène et contenait des sources linéaires discrètement réparties. Par ce biais, on tient compte de la situation géométrique des discontinuités d'absorption et de fission, tout en respectant les propriétés moyennes de diffusion et de ralentissement du réacteur.

b) Performances des codes basés sur cette théorie

A partir de cette théorie, on a écrit de nombreux codes dont, en France, HECTOR [4] et ASTYANAX [5]. Leurs performances ne sont comparables à celles des codes homogènes que si le réacteur contient un petit nombre de canaux (compte tenu des symétries). Au-delà d'une quarantaine de canaux, elles sont beaucoup moins bonnes (facteur dix sur le temps et deux sur l'encombrement).

c) Applications possibles

Le principal intérêt des codes sources-puits est de décrire la forme du flux au voisinage des irrégularités de structure d'une pile de propriétés diffusantes et modératrices uniformes. Comme irrégularités possibles, on peut citer :

- la présence, dans un canal d'un réseau régulier, d'une barre de contrôle à la place d'une barre de combustible,
- la frontière de deux réseaux réguliers différents,
- la juxtaposition de canaux d'irradiations différentes dans une supercellule.

La dernière possibilité est liée à la prévision, dans le coeur d'une pile de puissance, des remontées locales de température occasionnées par le renouvellement progressif du combustible. Ces codes permettent également de dépouiller les expériences de substitution d'un petit nombre de canaux. Il suffit que le réseau de référence possède les mêmes propriétés de diffusion et de ralentissement que le réseau à tester.

3 - Théorie hétérogène

La troisième théorie vient au secours des deux premières lorsque le réacteur ne comporte pas uniquement de larges réseaux réguliers et ne possède pas, de surcroît des propriétés diffusantes et modératrices uniformes. Elle permet, par exemple, de dépouiller une expérience où sont juxtaposés des réseaux réguliers minces de propriétés diffusantes et modératrices différentes, ou d'évaluer le saut de réactivité provoqué par la suppression du réfrigérant autour du combustible dans un ou plusieurs canaux d'une pile à eau lourde et d'étudier la variation du flux autour des dits canaux ; elle permet enfin d'étudier le flux autour d'un canal vide placé au centre d'un réseau de canaux chargés.

Comme il est impossible de résoudre commodément l'équation du transport dans un réacteur hétérogène, on est amené à utiliser la théorie de transport asymptotique dans le modérateur. C'est pourquoi la théorie hétérogène ne s'applique qu'aux réacteurs dont la distance entre canaux est relativement grande vis-à-vis du libre parcours moyen dans le modérateur.

Les formulations hétérogènes écrites jusqu'à ce jour avaient pour inconvénient d'introduire des paramètres dépendant de la structure du flux dans le réacteur [6], [7] et [9] ou de nécessiter l'utilisation d'un code auxiliaire, coûteux en temps machine, pour calculer la valeur des paramètres [8].

L'objet de ce mémoire est d'exposer une nouvelle formulation hétérogène où les canaux sont caractérisés par des paramètres formellement indépendants de l'environnement et dont le calcul prend moins de 30 centièmes de seconde (par type de canal) sur IBM 360/91. On montre qu'en utilisant la nouvelle formulation hétérogène on respecte à la fois la formule ABH [10] du facteur d'utilisation thermique et celle de la longueur d'extrapolation des canaux (ce qui était impossible avec la théorie sources-puits). La nouvelle formulation apparaît ainsi comme l'extension au calcul des réacteurs hétérogènes de la théorie ABH, initialement développée pour le calcul des cellules. Sa programmation sur IBM 360/91 a donné naissance

au code FODITH⁽¹⁾ (FOrmulation DIpolaire de la Théorie Hétérogène). Ce code est actuellement à peu près deux fois plus lent et plus encombrant qu'HECTOR. Mais au prix d'approximations entraînant des erreurs très minimes sur les valeurs du flux et de la réactivité, il serait peut-être possible de le rendre aussi rapide et aussi peu encombrant qu'un code de diffusion (homogène) à deux dimensions.

⁽¹⁾ Voir description en [13].

SOMMAIRE

CHAPITRE I - Théorème de séparation

On considère le problème général du calcul du flux dans un réacteur hétérogène. On démontre en théorie du transport que la contribution de chaque canal peut être obtenue séparément de celle des autres canaux. Elle peut être calculée en cellule ouverte. On entend par cellule ouverte (terme proposé par ALPIAR [8C]) la géométrie constituée en entourant le canal par du modérateur jusqu'à l'infini. L'introduction d'une source de compensation dans le canal permet de tenir indirectement compte de l'environnement. Cette source est proportionnelle à la somme des contributions des autres canaux (également calculées en cellule ouverte). Plus précisément soient v le flux angulaire régnant dans le réacteur, v_k la contribution du canal k et S_k la source de compensation à y introduire.

On a :

$$v = \sum_k v_k$$

à condition que S_k ait pour intensité, dans le milieu i contenu dans le canal k :

$$S_{ik} = (\hat{\Sigma}_{am} - \hat{\Sigma}_{ai}) v_{ok}$$

avec

$$v_{ok} = \sum_{j \neq k} v_j$$

L'opérateur $\hat{\Sigma}_{ai}$ réunit symboliquement les opérateurs d'absorption totale de transfert, en énergie et de production du milieu i ; m est l'indice du modérateur.

CHAPITRE II - Application du théorème de séparation au calcul d'un réacteur hétérogène de hauteur infinie en théorie monocinétique

On développe en série de FOURIER autour de l'axe de chaque canal la source de compensation et la contribution au flux qui lui sont propres. On ne conserve que le terme de révolution (polaire) et le terme antisymétrique (dipolaire) de ces développements. Dans le modérateur, on assimile le flux réel au flux asymptotique. On utilise la théorie du transport à l'intérieur du canal. On suppose en outre, pour simplifier, le choc isotrope.

On introduit les paramètres hétérogènes pour écrire les coefficients des fonctions de BESSEL composant l'expression asymptotique, dans le modérateur, de la contribution de chaque canal. On obtient les formules de ces paramètres en comparant les résultats d'un calcul de cellule "fermée" à ceux du calcul du réseau infini périodique correspondant, effectué au moyen de la nouvelle formulation hétérogène. Les formules obtenues ne font pas intervenir le pas du réseau car les paramètres ont été définis en cellule ouverte.

L'équation de criticité s'obtient en écrivant qu'au centre de chaque canal la somme des contributions des autres canaux est égale à la somme des expressions asymptotiques de ces contributions (dans l'esprit du théorème de séparation, on remplace chaque canal par du modérateur pour calculer la contribution des autres canaux).

CHAPITRE III - Généralisation à la théorie multigroupe

On utilise un seul groupe pour traiter les neutrons thermiques. On applique les résultats du chapitre II dans chaque groupe et on tient compte des sources de ralentissement présentes dans le combustible et le modérateur de façon séparées.

L'équation de criticité est mise sous forme matricielle. Sa résolution (itérative) sur IBM 360/91 est l'objet du code FODITH.

CHAPITRE IV - Relation entre le coefficient de diffusion radial thermique et les paramètres hétérogènes

On détermine la valeur, à la frontière de la cellule, du courant antisymétrique (dont dépend la formule du coefficient de diffusion radial thermique⁽¹⁾) sans faire appel à l'approximation d'uniformité et d'isotropie du flux de structure fine à l'intérieur de chacun des milieux de la cellule. On utilise, pour cela, le formalisme de la nouvelle formulation hétérogène. Cela permet d'écrire la formule complète du coefficient de diffusion radial thermique en fonction des paramètres hétérogènes. Le calcul de cette formule s'effectue sur IBM 360/91 au moyen du code PODIC (Polaire Dipolaire en Cellule).

CHAPITRE V - Correction due à l'anisotropie du choc dans le modérateur et correction due aux fuites axiales

Ce chapitre est consacré à la correction de certaines formules établies au chapitre III.

CHAPITRE VI - Résultats numériques - Comparaison avec l'expérience

La première partie de ce chapitre est consacrée à la comparaison des codes FODITH, HECTOR et RIFIFI en vue de l'évaluation de la réactivité de réacteurs de type MARIUS. On constate que FODITH tient les promesses de la théorie hétérogène (voir introduction) ; en ce sens qu'il donne une valeur acceptable de la réactivité, lorsque le réacteur est composé de zones étroites dotées de propriétés diffusantes et ralentissantes différentes, alors que les valeurs calculées par HECTOR (code sources-puits) et RIFIFI (code de diffusion) s'éloignent de la réalité de plus de 1500 pcm (dans des sens opposés).

Dans la seconde partie on applique FODITH au calcul du gradient du flux à travers les barreaux d'un réacteur expérimental AGR comportant en son centre un canal vide. Il apparaît que FODITH est capable de représenter assez convenablement la structure fine du flux dans un réseau irrégulier.

⁽¹⁾ Voir [11] et [12].

En troisième partie, on recherche à l'aide de PODIC, la valeur de la correction à appliquer à la formule usuelle du coefficient de diffusion radial thermique, pour tenir compte de la non-isotropie et de la non-uniformité du flux de structure fine à l'intérieur de chacun des milieux de la cellule. On s'aperçoit que cette correction est une fonction croissante (en valeur absolue) du produit du volume et de la section d'absorption du combustible. Elle est généralement négative et peut atteindre 5 à 17 %.

CHAPITRE I - THEOREME DE SEPARATION⁽¹⁾

1 - ENONCE DU PROBLEME

Considérons le problème général du calcul du flux dans un réacteur hétérogène de n canaux (non forcément identiques). La contribution de chaque canal peut être calculée séparément de celle des autres canaux. Elle est solution de l'équation du transport dans la cellule ouverte constituée en entourant le canal par du modérateur jusqu'à l'infini⁽²⁾. Il suffit d'introduire dans le canal une source de compensation proportionnelle à la contribution des autres canaux pour tenir compte de leur présence.

Plus précisément soient v le flux régnant dans le réacteur, v_k la contribution du canal k et S_k la source de compensation à y introduire. On a :

$$v = \sum_{k=1}^n v_k \quad (I.1)$$

à condition que S_k ait pour intensité dans le milieu i du canal k

$$S_{ik}(\vec{r}, \vec{\Omega}, v, t) = (\hat{\Sigma}_{am} - \hat{\Sigma}_{ai}) v_{ok} \quad (I.2)$$

en $\vec{r}, \vec{\Omega}, v, t$

avec

$$v_{ok} = \sum_{j \neq k} v_j \quad (I.3)$$

L'opérateur $\hat{\Sigma}_a$ réunit symboliquement les opérateurs d'absorption totale, de transfert en énergie et de fission :

$$\hat{\Sigma}_a = \Sigma_t - \hat{\Sigma}_s - \frac{1}{4\pi} P_f$$

⁽¹⁾ qu'on peut encore appeler *théorème de superposition*.

⁽²⁾ à condition de traiter le milieu extérieur du réacteur comme un canal noir particulier.

L'opérateur d'absorption totale Σ_t est un scalaire. Les opérateurs de transfert en énergie et de fission sont respectivement définis par les relations :

$$\hat{\Sigma}_s v \text{ en } \vec{r}, \vec{\Omega}, v, t = \int_0^\infty dv' \int_{(4\pi)} d\Omega' \Sigma_s(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, v' \rightarrow v) v(\vec{r}, \vec{\Omega}', v', t)$$

$$P_f \phi \text{ en } \vec{r}, v, t = \chi(v) \int_0^\infty dv' v_f(v') \Sigma_f(v') \phi(\vec{r}, v', t)$$

avec
$$\phi = \int_{(4\pi)} v d\Omega$$

L'indice m indique l'appartenance au milieu modérateur. Le milieu i peut être un barreau de combustible, une ceinture de gaines, une cavité ou une couronne de modérateur, etc.

On pose :

$$\phi_k = \int_{(4\pi)} v_k d\Omega \quad (I.4)$$

$$\phi_{ok} = \int_{(4\pi)} v_{ok} d\Omega \quad (I.5)$$

De (I.1) et (I.3), on tire, par intégration sur l'angle solide (4π) :

$$\phi = \sum_{k=1}^n \phi_k \quad (I.6)$$

$$\phi_{ok} = \sum_{j \neq k} \phi_j \quad (I.7)$$

2 - DEMONSTRATION

Pour fixer les idées, on supposera que chaque canal est composé seulement de deux milieux : un barreau de combustible (indice u) entouré d'une cavité (indice c). On explicitera l'opérateur $\hat{\Sigma}_a$.

Le flux angulaire dans le réacteur obéit aux équations :

1. dans le modérateur :

$$\text{div } \vec{\Omega} v + \Sigma_{tm} v = \hat{\Sigma}_{sm} v - \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (\text{I.8})$$

2. dans la cavité contenue dans le canal k (indiqué k) :

$$\text{div } \vec{\Omega} v = - \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (\text{I.9})$$

3. dans le barreau contenu dans le canal k (indiqué k) :

$$\text{div } \vec{\Omega} v + \Sigma_{tuk} v = \hat{\Sigma}_{suk} v + \frac{1}{4\pi} P_{fuk} \phi - \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (\text{I.10})$$

Le flux angulaire v_k obéit, dans la géométrie k (composée du canal k, où a été introduite la source de compensation S_k définie par (I.2), et de modérateur jusqu'à l'infini), aux équations :

1. dans le modérateur y compris sur l'emplacement des canaux indicés $j \neq k$:

$$\text{div } \vec{\Omega} v_k + \Sigma_{tm} v_k = \hat{\Sigma}_{sm} v_k - \frac{1}{v} \frac{\partial v_k}{\partial t} \quad (\text{I.11})$$

2. dans la cavité :

$$\operatorname{div} \vec{\Omega} v_k = \Sigma_{tm} v_{ok} - \hat{\Sigma}_{sm} v_{ok} - \frac{1}{v} \frac{\partial v_k}{\partial t} \quad (I.12)$$

3. dans le barreau :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{\Omega} v_k + \Sigma_{tuk} v_k &= \hat{\Sigma}_{suk} v_k + \frac{1}{4\pi} P_{f_{uk}} \phi_k + (\Sigma_{tm} - \Sigma_{tuk}) v_{ok} \\ &- (\hat{\Sigma}_{sm} - \hat{\Sigma}_{suk}) v_{ok} + \frac{1}{4\pi} P_{f_{uk}} \phi_{ok} - \frac{1}{v} \frac{\partial v_k}{\partial t} \end{aligned} \quad (I.13)$$

Il est aisé de vérifier (en superposant toutes les géométries k) par addition des équations, en se rappelant (I.3) et (I.7), que $\sum_k v_k$ vérifie les équations (I.8), (I.9) et (I.10). Comme v est unique, on en déduit (I.1) (à un facteur multiplicatif près, les équations étant homogènes). D'où la démonstration du théorème. On acquiert ainsi la possibilité de calculer v en calculant séparément tous les v_k . Cela revient à séparer l'action des canaux d'où le nom du théorème.

Cette possibilité est mise à profit dans le présent rapport, en théorie multigroupe, en supposant le choc isotrope (quitte à en tenir compte par la suite par une correction) et en faisant abstraction de la thermalisation (on supposera que les sections efficaces du groupe thermique ont été bien moyennées).

3 - TRANSPOSITION DU THEOREME DE SEPARATION EN THEORIE MULTIGROUPE

En théorie à NG groupes, avec les conventions choisies $v(v)$, $\phi(v)$, $v_k(v)$ et $\phi_k(v)$ deviennent respectivement : v^g , ϕ^g , v_k^g et ϕ_k^g et les opérateurs Σ_t , Σ_s et P_f se transforment suivant le schéma :

$$\Sigma_t(v) \rightarrow \Sigma_t^g \quad (I.14)$$

$$\hat{\Sigma}_s^g v \rightarrow \frac{1}{4\pi} \hat{\Sigma}_s^g \phi = \frac{1}{4\pi} \left(\Sigma_s^g \phi^g + \sum_{1 \leq g' < g} T(g' \rightarrow g) \phi^{g'} \right) \quad (I.15)$$

$$\frac{1}{4\pi} P_f^g \phi \rightarrow \frac{1}{4\pi} P_f^g \phi = \frac{\chi^g}{4\pi} \sum_{g'=1}^{NG} v_f^{g'} \Sigma_f^{g'} \phi^{g'} \quad (I.16)$$

où Σ_t^g , Σ_s^g et Σ_f^g désignent respectivement les sections efficaces macroscopiques d'absorption totale, de diffusion et de fission dans le groupe g ; la section efficace macroscopique de transfert du groupe g' au groupe g est notée $T(g' \rightarrow g)$; la quantité v_f^g est le nombre moyen de neutrons que libère une fission lorsqu'elle est provoquée par des neutrons du groupe g ; le symbole χ^g représente la fraction des neutrons nés par fission qui entrent dans le groupe g ; et le vecteur composé de tous les ϕ_g est noté ϕ :

$$\phi = \left\{ \phi_g, g = 1, NG \right\}$$

Le groupe des neutrons les plus rapides est évidemment le groupe numéro un.

Compte tenu de ces changements, l'intensité de la source de compensation s'écrit :

dans la cavité :

$$S_{ck}^g = \Sigma_{tm}^g v_{ok}^g - \frac{1}{4\pi} \hat{\Sigma}_{sm}^g \phi_{ok} \quad (I.17.c)$$

dans le barreau :

$$S_{uk}^g = (\Sigma_{tm}^g - \Sigma_{tuk}^g) v_{ok}^g - \frac{1}{4\pi} (\hat{\Sigma}_{sm}^g - \hat{\Sigma}_{suk}^g) \phi_{ok} + \frac{1}{4\pi} P_{fuk}^g \phi_{ok} \quad (I.17.b)$$

avec

$$v_{ok}^g = \sum_{j \neq k} v_j^g \quad (I.18)$$

$$\phi_{ok}^g = \sum_{j \neq k} \phi_j^g \quad (I.19)$$

et

$$\phi_{ok} = \left\{ \phi_{ok}^g, g = 1, NG \right\}$$

Et les équations (I.11), (I.12) et (I.13) de la géométrie k deviennent :

1. dans le modérateur, y compris sur l'emplacement des canaux $j \neq k$:

$$\text{div } \vec{\Omega} v_k^g + \Sigma_{tm}^g v_k^g = \frac{1}{4\pi} \hat{\Sigma}_{sm}^g \phi_k - \frac{1}{v} \frac{\partial v_k^g}{\partial t} \quad (I.20)$$

2. dans la cavité :

$$\text{div } \vec{\Omega} v_k^g = \Sigma_{tm}^g v_{ok}^g - \frac{1}{4\pi} \hat{\Sigma}_{sm}^g \phi_{ok} - \frac{1}{v} \frac{\partial v_k^g}{\partial t} \quad (I.21)$$

3. dans le barreau :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{\Omega} v_k^g + \Sigma_{tuk}^g v_k^g &= \frac{1}{4\pi} \hat{\Sigma}_{suk}^g \phi_k + \frac{1}{4\pi} P_{f_{uk}}^g \phi_k \\ &+ (\Sigma_{tm}^g - \Sigma_{tuk}^g) v_{ok}^g - \frac{1}{4\pi} (\hat{\Sigma}_{sm}^g - \hat{\Sigma}_{suk}^g) \phi_{ok} + \frac{1}{4\pi} P_{f_{uk}}^g \phi_{ok} - \frac{1}{v} \frac{\partial v_k^g}{\partial t} \end{aligned} \quad (I.22)$$

avec

$$\phi_k = \left\{ \phi_k^g, g = 1, NG \right\}$$

Dans l'équation (I.22), les termes dus au ralentissement et à la fission dans le barreau peuvent être regroupés en un terme unique.

On posera :

$$\sigma_k^g = \sum_{1 \leq g' < g} T_{uk}(g' \rightarrow g) (\phi_k^{g'} + \phi_{ok}^{g'}) + \chi^g \sum_{g'=1}^{NG} \Sigma_{fuk}^{g'} (\phi_k^{g'} + \phi_{ok}^{g'})$$

ce qui donne, compte tenu de (I.6) et (I.19) :

$$\sigma_k^g = \hat{S}_k^g(\phi) = \sum_{1 \leq g' < g} T_{uk}(g' \rightarrow g) \phi^{g'} + \chi^g \sum_{g'=1}^{NG} \nu_{fuk}^{g'} \Sigma_{fuk}^{g'} \phi^{g'} \quad (I.23)$$

Avec cette convention, (I.22) s'écrit (cf. (I.15)) :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{\Omega} v_k^g + \Sigma_{tuk}^g v_k^g = \frac{1}{4\pi} \Sigma_{suk}^g \phi_k^g + \left\{ (\Sigma_{tm}^g - \Sigma_{tuk}^g) v_{ok}^g - \frac{1}{4\pi} (\hat{\Sigma}_{sm}^g \phi_{ok} - \Sigma_{suk}^g \phi_{ok}^g) \right. \\ \left. + \frac{\hat{S}_k^g}{4\pi}(\phi) \right\} - \frac{1}{v} \frac{\partial v_k^g}{\partial t} \quad (I.22.A) \end{aligned}$$

Cela permet de considérer cette équation comme une équation monocinétique avec source. A partir de maintenant, on la considérera comme telle (sans fission, sans ralentissement, mais avec sources).

La source de compensation dans le barreau est ainsi changée en :

$$Z_{uk}^g = (\Sigma_{tm}^g - \Sigma_{tuk}^g) v_{ok}^g - \frac{1}{4\pi} (\hat{\Sigma}_{sm}^g \phi_{ok} - \Sigma_{suk}^g \phi_{ok}^g) + \frac{1}{4\pi} \hat{S}_k^g(\phi) \quad (I.23.b)$$

4 - DISCUSSION

Si le réacteur était critique, le terme en $\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}$ disparaîtrait de l'équation de BOLTZMANN. Pour la commodité des calculs, nous supposons avoir préalablement rendu le réacteur critique en multipliant P_f par un paramètre μ égal à l'inverse de k_{eff} . L'objet de ce travail est précisément de déterminer la valeur de ce paramètre.

Schématiquement nous procéderons comme suit : en premier lieu, par un calcul en géométrie k , nous chercherons à exprimer ϕ_k^g ($k = 1, n$) en fonction de ϕ_{ok}^g ($g = 1, NG$). Pour cela, nous développerons les sources des équations (I.21) et (I.22A) en série de FOURIER autour de l'axe du canal. Puis nous remplacerons ϕ_j^g dans (I.19) par son expression trouvée en fonction de ϕ_{oj}^g ($g = 1, NG$). Il en résultera un système de $n \times NG$ relations linéaires à satisfaire entre tous les ϕ_{ok}^g . En condensant ce système sous forme matricielle, on obtiendra l'équation matricielle de criticité du réacteur. Une fois cette équation résolue (en machine), il sera possible de calculer le flux dans le réacteur, grâce au théorème de séparation.

Dans un but évident de clarté, nous ferons d'abord ce travail en théorie monocinétique. Puis nous généraliserons à la théorie multigroupe.

Nous nous intéresserons uniquement aux réacteurs dont les canaux sont suffisamment espacés. On entend par canaux suffisamment espacés des canaux dont la distance bord à bord dépasse quelques (au moins trois) libres parcours moyens dans le modérateur. Entrent dans cette catégorie, les réacteurs à neutrons thermiques modérés au graphite ou à l'eau lourde.

Nous opérerons comme si la hauteur du réacteur était infinie, pour simplifier. Nous tiendrons compte ensuite des fuites axiales en séparant les effets propres au modérateur (augmentation de la capture) et les effets propres aux canaux (augmentation de la noirceur).

CHAPITRE II - APPLICATION DU THEOREME DE SEPARATION AU CALCUL D'UN REACTEUR HETEROGENE DE HAUTEUR INFINIE EN THEORIE MONOCINETIQUE

Les notations et conventions adoptées au cours de la démonstration du théorème sont conservées.

Section A

DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FOURIER DES SOURCES DE COMPENSATION AUTOUR DE L'AXE DU CANAL k

En théorie monocinétique, il n'y a pas de sources de ralentissement.

En conséquence les équations de v_k s'écrivent :

1. dans le modérateur et sur l'emplacement des canaux $j \neq k$:

$$\text{div } \vec{\Omega} v_k + \Sigma_{tm} v_k = \frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} \phi_k \quad (\text{II.A.1})$$

2. dans la cavité contenue dans le canal k :

$$\text{div } \vec{\Omega} v_k = \Sigma_{tm} v_{ok} - \frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} \phi_{ok} \quad (\text{II.A.2})$$

3. dans le barreau contenu dans le canal k :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{\Omega} v_k + \Sigma_{tuk} v_k &= \frac{1}{4\pi} \Sigma_{suk} \phi_k \\ &+ \left[(\Sigma_{tm} - \Sigma_{tuk}) v_{ok} - \frac{1}{4\pi} (\Sigma_{sm} - \Sigma_{suk}) \phi_{ok} + \frac{1}{4\pi} \hat{S}_k \phi \right] \quad (\text{II.A.3}) \end{aligned}$$

avec ⁽¹⁾

$$\hat{S}_k \phi = P_{fu_k} \phi = v_{fu} \Sigma_{fu} \phi$$

⁽¹⁾ Lorsque le doute ne sera pas permis, l'indice k du k^{ième} canal sera supprimé, pour alléger les notations.

Exception faite du terme $\frac{1}{4\pi} \hat{S}_k \phi$, qui sera traité à part, les sources de (II.A.2) et (II.A.3) s'expriment à partir des flux $v_{j \neq k}$ qui satisfont à l'équation du modérateur sur l'emplacement E_k du canal k .

Ces flux sont créés par des sources très éloignées de E_k .

D'autre part la section d'absorption du modérateur $\Sigma_{am} = \Sigma_{tm} - \Sigma_{sm}$ est faible (hypothèse des canaux suffisamment espacés de la fin du chapitre précédent).

Dans ces conditions on démontre (voir CASE, DE HOFFMANN et PLACZEK [14]) que v_j sur E_k peut être confondu, avec une très bonne précision, avec sa partie asymptotique. Celle-ci s'écrit, d'une manière générale :

$$v_{j \text{ as}}(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} \int_{(\vec{r}-\vec{r}_j) \cdot \vec{u} > 0} f_j(\vec{u}) \frac{e^{-K_m \vec{u} \cdot (\vec{r}-\vec{r}_j)}}{\Sigma_{tm} - K_m \vec{u} \cdot \vec{\Omega}} du \quad (\text{II.A.4})$$

où $\vec{r}_j$ désigne le centre du canal j - dans la section droite du réacteur où se trouve le point $\vec{r}$ - $\vec{u}$ un vecteur unitaire - contenu dans cette section - et f_j une fonction de $\vec{u}$.

C'est une superposition de solutions propres (en $\frac{e^{-K_m \vec{u} \cdot (\vec{r}-\vec{r}_j)}}{\Sigma_{tm} - K_m \vec{u} \cdot \vec{\Omega}}$) de l'équation du modérateur sans sources (II.A.1).

Le symbole K_m représente l'inverse de la longueur de diffusion du modérateur. On a :

$$\frac{\Sigma_{sm}}{K_m} \operatorname{argth} \frac{K_m}{\Sigma_{tm}} = 1 \quad (\text{II.A.5})$$

Hypothèse : Nous admettons que, pour les points $\vec{r}$ appartenant à E_k , on peut remplacer dans (I.18) v_j par sa partie asymptotique ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Cela revient à admettre compte tenu de (I.4) et de (I.5), que dans (I.19) on peut également remplacer ϕ_j par sa partie asymptotique - pour calculer ϕ_{ok} sur l'emplacement E_k du canal k -.

Cela donne :

$$v_{ok}(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \sum_{j \neq k} \frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} \int_{(\vec{r}-\vec{r}_j) \cdot \vec{u} > 0} f_j(\vec{u}) \frac{e^{-K_m \vec{u} \cdot (\vec{r}-\vec{r}_j)}}{\Sigma_{tm} - K_m \vec{u} \cdot \vec{\Omega}} du \quad (II.A.6)$$

soit par intégration sur (4π) , compte tenu de (II.A.5) :

$$\phi_{ok}(\vec{r}) = \sum_{j \neq k} \int_{(\vec{r}-\vec{r}_j) \cdot \vec{u} > 0} f_j(\vec{u}) e^{-K_m \vec{u} \cdot (\vec{r}-\vec{r}_j)} du \quad (II.A.7)$$

On peut encore écrire (II.A.6) sous la forme :

$$v_{ok} = \sum_{j \neq k} \frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} \int_{(\vec{r}-\vec{r}_j) \cdot \vec{u} > 0} du \frac{e^{-K_m \vec{u} \cdot (\vec{r}-\vec{r}_k)}}{\Sigma_{tm} - K_m \vec{u} \cdot \vec{\Omega}} f_j(\vec{u}) e^{-K_m \vec{u} \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j)} \quad (II.A.8)$$

Cette expression admet, évidemment la période 2π autour de l'axe du canal k. D'où l'idée de la développer en série de FOURIER.

Le développement de $\frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} \frac{e^{-K_m \vec{u} \cdot (\vec{r}-\vec{r}_k)}}{\Sigma_{tm} - K_m \vec{u} \cdot \vec{\Omega}}$ en fonction de l'angle α

qui amène $\vec{r} - \vec{r}_k$ sur une direction unitaire $\vec{W}$ orthogonale à l'axe du canal, s'écrit (voir Annexe A) :

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} \frac{e^{-K_m \vec{u} \cdot (\vec{r}-\vec{r}_k)}}{\Sigma_{tm} - K_m \vec{u} \cdot \vec{\Omega}} &= \frac{a_0}{2} + (a_{1,1} \cos \alpha' - a_{1,2} \sin \alpha') \cos \alpha \\ &+ (a_{1,2} \cos \alpha' + a_{1,1} \sin \alpha') \sin \alpha + \dots \quad (II.A.9) \end{aligned}$$

où α' est l'angle qui amène $\vec{u}$ sur $\vec{W}$.

Les coefficients a_0 , $a_{1,1}$ et $a_{1,2}$ ne dépendent pas de $\vec{u}$ mais seulement du module ρ de $\vec{r} - \vec{r}_k$, de l'angle φ qui amène la projection de $\vec{\Omega}$ dans le plan de section droite sur $\vec{r} - \vec{r}_k$ et de l'angle θ qui amène $\vec{\Omega}$ sur l'axe du canal⁽¹⁾.

Ils ont pour expressions :

$$a_0(\rho, \varphi, \theta) = \frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-K_m \rho \cos \alpha_0}}{\Sigma_{tm} - K_m \cos(\alpha_0 + \varphi) \sin \theta} d\alpha_0 \quad (\text{II.A.10})$$

$$a_{1,1}(\rho, \varphi, \theta) = \frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-K_m \rho \cos \alpha_0}}{\Sigma_{tm} - K_m \cos(\alpha_0 + \varphi) \sin \theta} \cos \alpha_0 d\alpha_0 \quad (\text{II.A.11})$$

$$a_{1,2}(\rho, \varphi, \theta) = \frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-K_m \rho \cos \alpha_0}}{\Sigma_{tm} - K_m \cos(\alpha_0 + \varphi) \sin \theta} \sin \alpha_0 d\alpha_0 \quad (\text{II.A.12})$$

Notons que a_0 , $a_{1,1}$ et $a_{1,2}$ sont invariants par rotation du couple de vecteurs $(\vec{r} - \vec{r}_k, \vec{\Omega})$ autour de l'axe du canal.

En portant (II.A.9) dans (II.A.8), on obtient le développement en série de Fourier à l'ordre un de v_{ok} :

(1) *orienté vers le haut du réacteur.*

$$\begin{aligned}
 v_{ok} &= \frac{a_0}{2} \sum_{j \neq k} \int_{(\vec{r}-\vec{r}_j) \cdot \vec{u} > 0} du f_j(\vec{u}) e^{-K_m \vec{u} \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j)} \\
 &+ a_{1,1} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \cdot \vec{W} \sum_{j \neq k} \int_{(\vec{r}-\vec{r}_j) \cdot \vec{u} > 0} du f_j(\vec{u}) \vec{u} \cdot \vec{W} e^{-K_m \vec{u} \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j)} \\
 &- a_{1,2} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \cdot \vec{W} \sum_{j \neq k} \int_{(\vec{r}-\vec{r}_j) \cdot \vec{u} > 0} du f_j(\vec{u}) \vec{u} \cdot R\vec{W} e^{-K_m \vec{u} \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j)} \\
 &+ a_{1,2} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \cdot R\vec{W} \sum_{j \neq k} \int_{(\vec{r}-\vec{r}_j) \cdot \vec{u} > 0} du f_j(\vec{u}) \vec{u} \cdot \vec{W} e^{-K_m \vec{u} \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j)} \\
 &+ a_{1,1} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \cdot R\vec{W} \sum_{j \neq k} \int_{(\vec{r}-\vec{r}_j) \cdot \vec{u} > 0} du f_j(\vec{u}) \vec{u} \cdot R\vec{W} e^{-K_m \vec{u} \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j)}
 \end{aligned}
 \tag{II.A.13}$$

où R représente symboliquement une rotation de $-\frac{\pi}{2}$ dans le plan de section droite.

On démontre en annexe B que la condition $(\vec{r} - \vec{r}_j) \cdot \vec{u} > 0$ peut être remplacée par la condition $(\vec{r}_k - \vec{r}_j) \cdot \vec{u} > 0$ dans toutes les intégrales figurant dans (II.A.13).

Compte tenu de (II.A.7), on peut donc écrire:

$$\begin{aligned}
 v_{ok} = & \frac{a_0}{2} \phi_{ok}(\vec{r}_k) - \frac{1}{K_m} \left(a_{1,1} \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \cdot \vec{W} (\vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k) \cdot \vec{W}) \right. \\
 & - a_{1,2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \cdot \vec{W} (\vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k) \cdot R\vec{W}) + a_{1,2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \cdot R\vec{W} (\vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k) \cdot \vec{W}) \\
 & \left. + a_{1,1} \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \cdot R\vec{W} (\vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k) \cdot R\vec{W}) \right) \quad (II.A.14)
 \end{aligned}$$

où $\vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k)$ est le gradient du flux ϕ_{ok} au point $\vec{r}_k$.

Le choix de $\vec{W}$ n'est pas encore fixé. Nous prendrons pour simplifier :

$$\vec{W} = \frac{\vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k)}{|\vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k)|}$$

Le développement de v_{ok} devient :

$$v_{ok} = \frac{a_0}{2} \phi_{ok}(\vec{r}_k) - \frac{1}{K_m} \left(a_{1,1} \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \cdot \vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k) + a_{1,2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \cdot R \vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k) \right) \quad (II.A.15)$$

Il est facile de voir, par intégration sur l'angle solide (4π) que

$$\int_{(4\pi)} d\Omega a_0 = 2 I_0(K_m \rho) \quad (II.A.16)$$

$$\int_{(4\pi)} d\Omega a_{1,1} = -2 I_1(K_m \rho) \quad (II.A.17)$$

$$\int_{(4\pi)} d\Omega a_{1,2} = 0 \quad (\text{II.A.18})$$

où I_0 et I_1 sont les fonctions de BESSEL modifiées de première espèce d'ordre zéro et d'ordre un.

Par suite le développement en série de FOURIER de ϕ_{ok} autour de l'axe du canal k admet pour expression, en se limitant à l'ordre un :

$$\phi_{ok}(\vec{r}) = I_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \phi_{ok}(\vec{r}_k) + \frac{2}{K_m} I_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \cdot \vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k) \quad (\text{II.A.19})$$

DEVELOPPEMENT DE $\hat{S}_k \phi$

En l'absence de connaissances précises sur la structure du flux ϕ dans la barre, nous adopterons l'approximation du "flux linéaire" (voir [12]). Nous écrirons :

$$\hat{S}_k \phi = \sigma_{ko} + (\vec{r} - \vec{r}_k) \cdot \vec{\nabla} \sigma_{k1} \quad (\text{II.A.20})$$

où σ_{ko} est la moyenne de $\hat{S}_k \phi$ sur le volume V_{uk} de la barre et où $\vec{\nabla} \sigma_{k1}$ est un vecteur dont les composantes x et y - dans un système d'axes rectangulaires Oxy orthogonal à l'axe du canal - sont les intégrales de $\hat{S}_k \phi$ pondérées respectivement par $\frac{x - x_k}{\int_{V_{uk}} (x - x_k)^2 dV}$ et $\frac{y - y_k}{\int_{V_{uk}} (y - y_k)^2 dV}$ sur le même volume⁽¹⁾.

Le choix de ce développement a deux avantages :

- le premier d'assurer la conservation des neutrons,
- le second de présenter une certaine affinité avec celui de ϕ_{ok} .

⁽¹⁾ Les composantes de $\vec{r} - \vec{r}_k$ dans ce système sont évidemment $x - x_k$ et $y - y_k$.

Ces deux développements possèdent, en effet, tous deux, un terme de révolution autour de l'axe du canal et un terme antisymétrique.

Compte tenu de (II.A.15), (II.A.19) et (II.A.20) les équations (II.A.2) et (II.A.3) deviennent :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{\Omega} v_k &= z_0(\Sigma_{tm}, \Sigma_{sm}) \phi_{ok}(\vec{r}_k) - \frac{1}{K_m} z_1(\Sigma_{tm}, \Sigma_{sm}) \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \cdot \vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k) \\ &\quad - \frac{1}{K_m} z_2(\Sigma_{tm}) \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \cdot R \vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k) \end{aligned} \quad (\text{II.A.2A})$$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{\Omega} v_k + \Sigma_{tuk} v_k &= \frac{\Sigma_{suk} \phi_k}{4\pi} + \left[z_0(\Sigma_{tm} - \Sigma_{tuk}, \Sigma_{sm} - \Sigma_{suk}) \phi_{ok}(\vec{r}_k) + \frac{\sigma_{ko}}{4\pi} \right. \\ &\quad - \frac{1}{K_m} z_1(\Sigma_{tm} - \Sigma_{tuk}, \Sigma_{sm} - \Sigma_{suk}) \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \cdot \vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k) \\ &\quad \left. - \frac{1}{K_m} z_2(\Sigma_{tm} - \Sigma_{tuk}) \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \cdot R \vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k) + \frac{\vec{\nabla} \sigma_{k1}}{4\pi} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_k) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.A.3A})$$

$$\text{avec} \quad z_0(t, s) = t \frac{a_0}{2} - \frac{s}{4\pi} I_0(K_m \rho) \quad (\text{II.A.21})$$

$$z_1(t, s) = + t a_{1,1} + \frac{s}{2\pi} I_1(K_m \rho) \quad (\text{II.A.22})$$

$$z_2(t) = + t a_{1,2} \quad (\text{II.A.23})$$

Notons la symétrie de révolution de ces expressions autour de l'axe du canal. Ce sera utile pour la suite.

Section B

INTRODUCTION ET CALCUL DES PARAMETRES HETEROGENES

B.1 Expression du flux asymptotique dans le modérateur de la géométrie k

La géométrie k est invariante par rotation. Les sources de v_k comportent un terme de révolution et un terme antisymétrique par rapport à l'axe du canal. Le flux ϕ_k comprendra donc lui-même un terme de révolution et un terme antisymétrique par rapport à cet axe. Dans le modérateur, ϕ_k se compose d'une partie asymptotique et d'une perturbation de transport localisée au voisinage de la frontière du canal (sur une épaisseur de un à deux libres parcours).

Compte tenu de (II.A.21), (II.A.22) et (II.A.23) cette partie asymptotique a pour expression :

$$\begin{aligned} \phi_{k_{as}}(\vec{r}) = & (\tilde{\gamma} \phi_{ok}(\vec{r}_k) + \gamma_u \sigma_{ko}) K_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \\ & - K_m (\tilde{\beta} \vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k) - \theta_u \vec{\nabla} \phi_{k1}) \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} K_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \quad (II.B.1.1) \end{aligned}$$

dans laquelle K_0 et K_1 sont les fonctions de BESSEL modifiées de seconde espèce d'ordre zéro et d'ordre un.

En effet le flux asymptotique créé dans le modérateur, par une source de révolution répartie dans le canal, est proportionnel à la solution propre d'ordre zéro K_0 de l'équation de diffusion $\Delta \phi - K_m^2 \phi = 0$. De même le flux asymptotique créé, dans le modérateur par une source antisymétrique répartie dans le canal, est proportionnel à la solution propre d'ordre un de la même équation, soit $K_m K_1(K_m \rho) \cos \alpha$ en désignant par α l'angle qui amène $\vec{r} - \vec{r}_k$ sur la direction (orthogonale à l'axe du canal) suivant laquelle la source est antisymétrique et par ρ le module⁽¹⁾ de $\vec{r} - \vec{r}_k$.

Le paramètre $\tilde{\gamma}$ est le coefficient multiplicatif de K_0 lorsque la source de révolution est la source $\mathcal{S}_0$ ayant pour intensité :

⁽¹⁾ On utilisera souvent pour alléger les expressions, la notation ρ à la place de $|\vec{r} - \vec{r}_k|$.

$z_0(\Sigma_{tm}, \Sigma_{sm})$ dans la cavité

$z_0(\Sigma_{tm} - \Sigma_{tu}, \Sigma_{sm} - \Sigma_{su})$ dans le barreau

De même, le paramètre γ_u est le coefficient multiplicatif de K_0 lorsque la source de révolution a pour intensité :

0 dans la cavité

$\frac{1}{4\pi}$ dans le barreau.

Le paramètre β est le coefficient multiplicatif de $K_m K_1(K_m \rho) \cos \alpha$ lorsque la source antisymétrique est la source $\mathcal{J}_1$ ayant pour intensité :

$\frac{1}{K_m} z_1(\Sigma_{tm}, \Sigma_{sm}) \cos \alpha + \frac{1}{K_m} z_2(\Sigma_{tm}) \sin \alpha$ dans la cavité

$\frac{1}{K_m} z_1(\Sigma_{tm} - \Sigma_{tu}, \Sigma_{sm} - \Sigma_{su}) \cos \alpha + \frac{1}{K_m} z_2(\Sigma_{tm} - \Sigma_{tu}) \sin \alpha$ dans le barreau

De même, le paramètre θ_u est le coefficient multiplicatif de $K_m K_1(K_m \rho) \cos \alpha$ lorsque la source antisymétrique a pour intensité :

0 dans la cavité

$\frac{\rho \cos \alpha}{4\pi}$ dans le barreau

On peut se demander pourquoi le flux antisymétrique ne comprend que des termes en $\cos \alpha$ alors que la source comporte des termes en $\cos \alpha$ et en $\sin \alpha$. L'explication en est simple. La source d'intensité $\frac{1}{K_m} z_2 \sin \alpha$ donne naissance à un flux scalaire en $\cos \alpha$ car elle est impaire⁽¹⁾ en φ (qui est, rappelons-le, l'angle qui amène la projection de $\vec{\Omega}$ dans le plan de section droite sur $\vec{r} - \vec{r}_k$).

⁽¹⁾ voir les formules (II.A.12) et (II.A.23).

Désormais $\tilde{\gamma}$ et γ_U porteront le nom de paramètres hétérogènes polaires, $\tilde{\beta}$ et θ_U celui de paramètres hétérogènes dipolaires. A l'origine de cette dénomination se trouve une allusion aux propriétés des milieux diffusants. Dans un milieu homogène diffusant infini, un pôle (une source linéaire) et un dipole (deux sources linéaires placées côte à côte et d'intensités algébriquement opposées) créent respectivement un flux en K_0 et un flux en $K_1 \cos \alpha$.

Corrélativement, nous dirons que nous travaillons ici en approximation dipolaire⁽¹⁾. L'approximation polaire⁽¹⁾ aurait consisté à se limiter au terme en K_0 dans l'expression (II.B.1.1) de ϕ_{kas} .

Validité de l'approximation dipolaire

Si le développement en série de FOURIER des sources de compensation avait été poussé plus loin, il est manifeste que les termes suivants du développement (II.A.19) de ϕ_{ok} auraient été successivement proportionnels à $I_2(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \cos 2 \alpha$, à $I_3(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \cos 3 \alpha$, etc. Or $I_n(K_m c)$, pour $K_m c$ fixé (c étant le rayon du canal), tend vers zéro très rapidement lorsque n tend vers l'infini (cf. [16 A]). Ainsi pour $K_m c = 0,2$ ($K_m = \frac{1}{50}$, $c = 10$).

$$I_3(K_m c) \sim \frac{1}{40} I_2(K_m c) \sim \frac{1}{800} I_1(K_m c) \sim \frac{1}{8000} I_0(K_m c)$$

Cela prouve la validité de l'approximation dipolaire.

La méthode utilisée pour calculer les paramètres hétérogènes repose sur la constatation que dans un réseau infini constitué par la répétition périodique d'un seul type de canal ou dans un réacteur comportant des irrégularités, le même canal est caractérisé par les mêmes valeurs de paramètres⁽²⁾. Cela découle de la manière dont les paramètres hétérogènes ont été introduits⁽³⁾ dans le formalisme. Ils ne dépendent ni du flux ni d'un quelconque pas de réseau. Ils ne sont liés en fait qu'aux caractéristiques du canal et aux propriétés physiques du modérateur qui l'entoure. Or on sait calculer le flux asymptotique dans le modérateur d'un réseau

(1) Ces notations sont tout à fait classiques (cf. [6] et [7]).

(2) On suppose que les modérateurs respectifs du réseau et du réacteur ont les mêmes propriétés neutroniques.

(3) Voir en annexe C, une autre façon d'introduire $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\beta}$.

régulier en utilisant le formalisme de calcul de cellule. On peut donc espérer pouvoir déterminer l'expression des paramètres en comparant les résultats d'un calcul de cellule fermée, à ceux du calcul du réseau infini correspondant, effectué au moyen de la nouvelle formulation hétérogène. Cette possibilité ne sera mise à profit que pour rechercher les formules de $\hat{\gamma}$ et de $\hat{\beta}$, celles de γ_u et de θ_u pouvant être obtenues directement.

B-2 Calcul des paramètres hétérogènes polaires

B.2a - Calcul de γ_u

Le calcul de γ_u est immédiat. Il suffit d'intégrer la relation de conservation⁽¹⁾ $\text{div } \vec{j} + \Sigma_a \varphi = \delta_u$ dans la cellule ouverte que constitue la géométrie k. On assimilera φ , dans le modérateur, à sa partie asymptotique⁽²⁾.

Cela donne :

$$\Sigma_{am} \gamma_u 2\pi \int_c^\infty K_0(K_m \rho) \rho d\rho = (1 - P_{uu_0}^*) V_u \quad (\text{II.B.2.1})$$

où c est le rayon extérieur du canal et V_u la section droite du barreau.

Le symbole $P_{uu_0}^*$ représente la probabilité pour un neutron né isotropiquement et uniformément (avec l'intensité $\frac{1}{4\pi V_u}$) dans le barreau d'y être capturé.

D'où :

$$\gamma_u = \frac{(1 - P_{uu_0}^*) V_u K_m}{2\pi c \Sigma_{am} K_1(K_m c)} \quad (\text{II.B.2.2})$$

(1) On désigne par Σ_a la section d'absorption définie par l'égalité :

$$\Sigma_a = \Sigma_t - \Sigma_s$$

par δ_u la fonction égale à 1 dans le barreau est nulle ailleurs, par $\vec{j}$ et φ le courant et le flux (scalaires) créés par la source d'intensité $\frac{1}{4\pi}$ uniformément répartie dans le barreau.

(2) Cette approximation est en partie justifiée car la perturbation de transport est localisée au voisinage du canal et l'intégration est pondérée par ρ .

car

$$\int_c^\infty K_0(K_m \rho) \rho d\rho = \frac{1}{K_m} K_1(K_m c) c$$

L'expression de $P_{uu_0}^*$ peut être déduite de l'expression du facteur d'utilisation thermique établie par la méthode ABH.

Elle est telle que (voir Annexe D) :

$$1 - P_{uu_0}^* = \frac{1}{\frac{\Sigma_{au} V_u}{2\pi c} \left(3\Lambda + \frac{K_m K_0(K_m c)}{\Sigma_{am} K_1(K_m c)} \right)} \quad (\text{II.B.2.3})$$

où Λ est la longueur d'extrapolation du canal. Dans [35], on montre que :

$$\Lambda = \lambda_N + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{\Gamma_{u_0}^{'+}} - 1 \right)$$

où $\Gamma_{u_0}^{'+}$ est la noirceur⁽¹⁾ du canal et λ_N la longueur d'extrapolation du canal noir de rayon c . Compte tenu de (II.B.2.3), γ_u s'écrit :

$$\gamma_u = \frac{K_m}{\Sigma_{au} \left(3\Lambda \Sigma_{am} K_1(K_m c) + K_m K_0(K_m c) \right)} \quad (\text{II.B.2.4})$$

Comme on peut le vérifier aisément la dimension de γ_u est d'ordre un en L .

B.2b - Calcul de $\tilde{\gamma}$

Considérons un réseau infini régulier composé de canaux de type k . Remplaçons dans chaque barreau la source de fission $\frac{\hat{S}_k \phi}{4\pi}$ par une source isotrope et uniforme d'intensité $\frac{1}{4\pi}$.

Le flux asymptotique dans le modérateur de la géométrie j a pour expression :

$$\phi_{jas}(\vec{r}) = (\tilde{\gamma} \phi_{oj}(\vec{r}_j) + \gamma_u) K_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_j|) - \tilde{\gamma} \vec{\nabla} \phi_{oj}(\vec{r}_j) \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} K_m K_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_j|) \quad (\text{II.B.2.5})$$

⁽¹⁾ La définition précise de cette quantité se trouve en annexe D.

Compte tenu de l'égalité $\phi_{ok}^{(1)} = \sum_{j \neq k} \phi_j$ et de l'hypothèse de la page 10, il vient :

$$\begin{aligned} \phi_{ok}(\vec{r}_k) = \sum_{j \neq k} & \left((\tilde{\gamma} \phi_{oj}(\vec{r}_j) + \gamma_u) K_o(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \right. \\ & \left. - \tilde{\beta} \vec{\nabla} \phi_{oj}(\vec{r}_j) \cdot \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} K_m K_1(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \right) \end{aligned} \quad (II.B.2.6)$$

Etant données la périodicité du réseau et la symétrie de ses sources autour de chaque canal, on a nécessairement :

$$\vec{\nabla} \phi_{oj}(\vec{r}_j) = 0 \quad (II.B.2.7)$$

$$\text{et} \quad \phi_{ok}(\vec{r}_k) = \phi_{oj}(\vec{r}_j) = \phi_o \quad (II.B.2.8)$$

quels que soient j et k .

La relation (II.B.2.6) se résume donc à :

$$\phi_o = (\tilde{\gamma} \phi_o + \gamma_u) S_o \quad (II.B.2.9)$$

$$\text{avec} \quad S_o = \sum_{j \neq k} K_o(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \quad (II.B.2.10)$$

$$\text{D'où} \quad \phi_o = \frac{\gamma_u S_o}{1 - \tilde{\gamma} S_o} \quad (II.B.2.11)$$

$$\text{et} \quad \phi_{jas}(\vec{r}) = \frac{\gamma_u}{1 - \tilde{\gamma} S_o} K_o(K_m |\vec{r} - \vec{r}_j|) \quad (II.B.2.12)$$

⁽¹⁾ L'indice k est ici l'indice d'un des canaux du réseau.

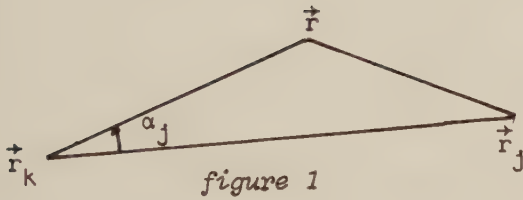
Par suite, la partie asymptotique dans le modérateur du flux total s'écrit, compte tenu de l'égalité $\phi = \sum_j \phi_j$:

$$\phi_{as}(\vec{r}) = \frac{\gamma_u}{1 - \tilde{\gamma} S_0} \sum_j K_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_j|) \quad (\text{II.B.2.13})$$

Pour $\vec{r}$ situé dans la cellule⁽¹⁾ centrée sur le canal k , la formule d'addition de NEUMANN (voir [16 B]) s'applique à toutes les fonctions $K_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_j|)$ pour $j \neq k$ (Le point $\vec{r}$ est alors plus proche de $\vec{r}_k$ que tous les autres centres de cellule).

On a :

$$\begin{aligned} K_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_j|) &= K_0(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) I_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_n(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) I_n(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \cos n \alpha_j \end{aligned} \quad (\text{II.B.2.14})$$



où α_j est l'angle qui amène $\vec{r}_j - \vec{r}_k$ sur $\vec{r} - \vec{r}_k$.

La substitution de ce développement dans (II .B.2.13) nous donne :

$$\begin{aligned} \phi_{as}(\vec{r}) &= \frac{\gamma_u}{1 - \tilde{\gamma} S_0} \left((K_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) + S_0 I_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \right. \\ &\left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \sum_{j \neq k} K_n(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \cos n \alpha_j \right) \end{aligned} \quad (\text{II.B.2.15})$$

(1) Il s'agit de la cellule fermée du réseau.

Si la cellule du réseau forme un polygone régulier de p côtés, il est facile de voir que les sommes $\sum_{j \neq k} K_n(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \cos n \alpha_j$ sont nulles sauf pour n multiple entier de p . Supposons le réseau carré. Le premier terme non nul de la double sommation apparaissant dans (II.B.2.15) est donc d'ordre quatre. En se référant aux tables sur les fonctions de Bessel, on peut voir qu'il est très petit vis-à-vis de $S_0 I_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|)$. On aboutit à la justification⁽¹⁾ de l'hypothèse de WIGNER-SEITZ qui consiste à assimiler le flux à son mode fondamental dans les calculs habituels de cellule.

Un tel calcul, en supposant la cellule cylindrique de rayon b , donne de ϕ_{as} l'expression suivante :

$$\phi_{as \text{ cell}}(\vec{r}) = \gamma_{ub} \Delta_0(K_m \rho) \quad (\text{II.B.2.16})$$

dans laquelle

$$\Delta_0(K_m \rho) = I_1(K_m b) K_0(K_m \rho) + K_1(K_m b) I_0(K_m \rho)$$

et où γ_{ub} est l'analogue de γ_u pour les cellules de rayon fini.

Le calcul de γ_{ub} se calque sur celui de γ_u (voir Annexe D).

On trouve :

$$\gamma_{ub} = \frac{K_m}{\sum_{au} (3\Lambda \sum_{am} \Delta_1(K_m c) + K_m \Delta_0(K_m c))} \quad (\text{II.B.2.17})$$

avec
$$\Delta_1(K_m \rho) = -I_1(K_m b) K_1(K_m \rho) - K_1(K_m b) I_1(K_m \rho)$$

L'application de la théorie hétérogène aux réseaux réguliers infinis devant conduire aux mêmes résultats que le calcul de cellule, il vient, après identification de terme fondamental de (II.B.2.15) et de $\phi_{as \text{ cell}}$:

⁽¹⁾ ce qui ne constitue pas, en soi, une nouveauté.

$$\frac{\gamma_u}{1 - \tilde{\gamma} S_o} = \gamma_{ub} I_1(K_m b) \quad (\text{II.B.2.18})$$

et

$$S_o = \frac{K_1(K_m b)}{I_1(K_m b)} \quad (\text{II.B.2.19})$$

Il résulte de ces égalités, compte tenu de (II.B.2.4) et (II.B.2.17) (voir Annexe E) que :

$$\tilde{\gamma} = \frac{I_1(K_m c)}{K_1(K_m c)} \times \frac{1 - \frac{K_m I_o(K_m c)}{3\Lambda \sum_{am} I_1(K_m c)}}{1 + \frac{K_m K_o(K_m c)}{3\Lambda \sum_{am} K_1(K_m c)}} \quad (\text{II.B.2.20})$$

La formule de $\tilde{\gamma}$, obtenue ci-dessus, est exacte en toute rigueur, car l'hypothèse de la cylindrisation de la cellule, admise au dernier moment, n'affecte que la valeur de S_o . En effet, ce traitement est indépendant de la valeur de b . A la limite, quand b tend vers l'infini, la forme de la cellule n'intervient plus et la formule de $\tilde{\gamma}$ reste la même.

Si l'on développe la formule (II.B.2.19) de S_o en série de $K_m b$ on obtient :

$$S_o \approx \frac{2}{K_m^2 b^2} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{K_m^2 b^2}{4} + 2\gamma \right)$$

Cette expression est, avec des notations différentes et au terme de correction de facteur de forme près, l'expression obtenue antérieurement par FEINBERG [1] et GALANINE [2] au moyen de la formule sommatoire de POISSON.

On montre en annexe F que le calcul du facteur d'utilisation thermique d'un réseau à l'aide de la nouvelle formulation hétérogène, compte tenu de (II.B.2.4) et (II.B.2.20), donne la formule ABH de f . On démontre aussi dans cette annexe que quelle que soit la configuration des canaux entourant le canal k , le rapport de la partie polaire du flux asymptotique ϕ_{as} à sa dérivée à la frontière de ce canal est égal (en l'absence de ralentissement à l'intérieur du barreau) à $\Lambda \lambda_m$. On désigne par λ_m le libre parcours moyen dans le modérateur. La nouvelle formulation hétérogène permet ainsi de respecter à la fois f et Λ (ABH), ce qui était impossible avec la théorie sources-puits.

B.3 Calcul des paramètres hétérogènes dipolaires

B.3a Définition des probabilités fictives

Nous préciserons d'abord ce qu'on entend par probabilités fictives au sens de BENOIST [12].

Considérons une cellule cylindrique de rayon fini ou non, composée d'un certain nombre de milieux concentriques. Soient respectivement ρ_j et ρ'_j les rayons intérieur et extérieur du milieu j . Traçons dans le plan de section droite de la cellule à partir de son centre, un système d'axes rectangulaires Oxy . Soient x et y les composantes du rayon vecteur partant du centre de la cellule dans ce système et Ω_x et Ω_y les composantes du vecteur unitaire $\vec{\Omega}$ qui donne la direction de propagation des neutrons.

Nous allons définir deux modes de normalisation d'une source :
 l'un avec une pondération en Ω_x (mode fictif),
 l'autre avec une pondération en x (mode x).
 Nous dirons qu'une source $q(\vec{r}, \vec{\Omega})$ localisée à un milieu i a une intensité fictive⁽¹⁾ unité lorsque :

$$\int_{(i)} dV \int_{(4\pi)} \Omega_x q(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\Omega = 1$$

(1) relativement à la direction Ox .

Il est facile de voir que la source $\frac{3}{4\pi V_i} \Omega_x$ a une intensité fictive unité.

Nous dirons qu'une source $q(\vec{r}, \vec{\Omega})$ localisée au milieu i a une intensité unité suivant le mode x lorsque :

$$\int_{(i)} \frac{x dV}{(\rho_i^2 + \rho_i'^2)^{1/2}} \int_{(4\pi)} q(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\Omega = 1$$

Il est facile de voir que la source $\frac{x}{\pi V_i (\rho_i^2 + \rho_i'^2)^{1/2}}$ a une intensité unité suivant le mode x .

Nous définirons, de même, deux modes de capture, l'un avec une pondération en Ω_x (capture fictive), l'autre avec une pondération en x (capture en x).

La capture fictive⁽¹⁾ dans le milieu j des neutrons formant le flux angulaire v est donnée par la double intégrale :

$$\frac{1}{\lambda_j} \int_{(j)} dV \int_{(4\pi)} \Omega_x v d\Omega$$

Remarque : L'intégrale $\int_{(4\pi)} \Omega_x v d\Omega$ n'est autre que la composante x du courant $\vec{g}$ associé à v .

La capture suivant le mode x (ou en x) dans le milieu j des neutrons formant le flux angulaire v est donnée par la double intégrale⁽¹⁾ :

⁽¹⁾ voir renvoi (1) de 1a page précédente.

$$\Sigma_{aj} \int_{(j)} \frac{x \, dV}{(\rho_j^2 + \rho_j'^2)^{1/2}} \int_{(4\pi)} v \, d\Omega$$

où Σ_{aj} est la section d'absorption du milieu j .

Remarque : L'intégrale $\int_{(4\pi)} v \, d\Omega$ n'est autre que le flux scalaire φ associé à v .

Nous désignerons respectivement par :

P_{ij}^* et P_{ij}^* la capture fictive et la capture en x , dans le milieu j , dues à une source anisotrope localisée au milieu i et d'intensité angulaire $\frac{3}{4\pi V_1} \Omega_x$ (ce qui correspond à une intensité fictive unité). Nous dirons alors que la source est en Ω_x .

De même, nous désignerons respectivement par :

P_{ij}^* et P_{ij}^* la capture fictive et la capture en x , dans le milieu j , dues à une source isotrope localisée au milieu i et d'intensité angulaire $\frac{x}{\pi V_1 (\rho_i^2 + \rho_i'^2)^{1/2}}$ (ce qui correspond à une intensité unité suivant le mode x). Nous dirons alors que la source est en x .

Par analogie avec le formalisme classique des probabilités de collision, nous dirons que :

P_{ij}^* est la probabilité pour un neutron né "fictivement"⁽¹⁾ dans le milieu i d'être capturé "fictivement"⁽¹⁾ dans le milieu j ;

P_{ij}^* est la probabilité pour un neutron né "fictivement"⁽¹⁾ dans le milieu i d'être capturé, suivant le mode x, dans le milieu j ;

P_{ij}^* est la probabilité pour un neutron né, suivant le mode x, dans le milieu i, d'être capturé "fictivement"⁽¹⁾ dans le milieu j ;

P_{ij}^* est la probabilité pour un neutron né, suivant le mode x, dans le milieu i, d'être capturé, suivant le mode x, dans le milieu j.

RELATIONS DE CONSERVATION

1er type

BENOIST a démontré, dans la section B de sa thèse [12], la relation :

$$\sum_j P_{ij}^* = 1 \quad (\text{II.B.3.1})$$

On obtient, en Annexe G, la relation voisine :

$$\sum_j P_{ij}^* = 0 \quad (\text{II.B.3.2})$$

Ces deux relations ont été établies en intégrant l'équation de BOLTZMANN avec source dans le milieu i (en Ω_x ou en x), successivement sur $\Omega_x d\Omega$ et sur le volume de la cellule.

⁽¹⁾ voir renvoi (1) de la page 26.

Second type

En intégrant cette même équation sur $d\Omega$ puis sur x dV dans le volume de la cellule, on obtient (voir Annexe G) ces deux autres relations où S_{cel} désigne la surface extérieure de la cellule :

$$\int_{S_{cel}} x \vec{g}_i \cdot \vec{n} dS - \sum_j \lambda_j P_{ij}^* + \sum_j (\rho_j^2 + \rho_j'^2)^{1/2} P_{ij}^* = 0 \quad (II.B.3.3)$$

(lorsque la source est en Ω_x) et

$$\int_{S_{cel}} x \vec{g}_i \cdot \vec{n} dS - \sum_j \lambda_j P_{ij}^* + \sum_j (\rho_j^2 + \rho_j'^2)^{1/2} P_{ij}^* = (\rho_i^2 + \rho_i'^2)^{1/2} \quad (II.B.3.4)$$

(lorsque la source est en x).

Le vecteur $\vec{g}_i$ est le courant associé au flux angulaire créé dans le problème à source correspondant.

On s'est servi de la relation

$$x \operatorname{div} \vec{g}_i = \operatorname{div} x \vec{g}_i - g_{ix}$$

dans laquelle g_{ix} est la composante x de $\vec{g}_i$.

La relation (II.B.3.3) est, aux notations près, la relation (E.7) obtenue par BENOIST dans [12] par une méthode différente.

RELATIONS DE RECIPROCITE

On démontre, en Annexe G, à l'aide du théorème de réciprocité (voir [15]) les relations suivantes :

$$V_i \lambda_j P_{ij}^* = V_j \lambda_i P_{ji}^* \quad (II.B.3.5)$$

$$\sum_{ai} V_i \lambda_j P_{ij}^* = -\frac{4}{3} V_j P_{ji}^* \quad (\text{II.B.3.6})$$

$$V_i \sum_{ai} P_{ij}^* = V_j \sum_{aj} P_{ji}^* \quad (\text{II.B.3.7})$$

CALCUL DES PROBABILITES

Chaque probabilité P_{ij}^* - nous considérons ici la probabilité fictive en son sens le plus général, les indices i et j peuvent être sous-entendus barrés - se compose d'une part de la contribution des neutrons capturés dans j sans avoir jamais pénétré dans le modérateur⁽¹⁾, soit P_{ij}^+ , d'autre part de celle des neutrons capturés dans j , après avoir voyagé une ou plusieurs fois dans le modérateur. Mathématiquement, cela se traduit par la relation (cf. [12] section D) :

$$P_{ij}^* = P_{ij}^+ + Sg_{1-}^i \Gamma_j'^+$$

où $\Gamma_j'^+$ est la probabilité pour un neutron quittant le modérateur d'être capturé dans j sans être retourné dans le modérateur et Sg_{1-}^i le courant fictif des neutrons pénétrant dans le canal (voir Annexe H).

Les probabilités P_{ij}^+ sont calculées à partir des probabilités de premier choc P_{ij} en utilisant l'approximation du flux linéaire (cf. [12] section F).

B.3b - Calcul de θ_u

Le calcul de θ_u s'inspire de celui de γ_u . On écrit la relation de conservation (II.B.3.4) dans la cellule ouverte que constitue la géométrie k . On prend évidemment $i = u$. Le terme $\int_{S_{\text{cel}}} \mathbf{x} \cdot \vec{g}_1 \cdot \vec{n} \, dS$ est nul. Pour le calcul du terme $\int_{V_{\text{cel}}} \mathbf{x} \cdot \vec{\phi} \, dV$ (équivalent au terme $(b^2 + c^2)^{1/2} P_{um}^*$ dans une cellule de rayon b fini), on assimilera le flux à sa partie asymptotique⁽²⁾. Cela donne :

(1) Les relations de conservation et de réciprocité nous autorisent à ne pas considérer, pour le calcul des probabilités, les naissances et captures dans le modérateur.

(2) voir renvoi (2) de la page 20. L'intégration, est cette fois, pondérée par ρ^2 .

$$\sum_{am} \frac{4}{V_u a} \theta_u K_m \pi \int_c^\infty K_1(K_m \rho) \rho^2 d\rho = (\lambda_u P_{\bar{u}\bar{u}}^* + \lambda_c P_{\bar{u}c}^* + \lambda_m P_{\bar{u}m}^*) + a - a P_{\bar{u}\bar{u}}^*$$

(II.B.3.8)

car $P_{\bar{u}c}^* = 0 \quad (\Sigma_{ac} = 0)$

Le rayon du barreau est noté a .

Or

$$K_m \int_c^\infty K_1(K_m \rho) \rho^2 d\rho = K_2(K_m c) c^2$$

Par suite, compte tenu de (II.B.3.1) et (II.B.3.6) on a :

$$\theta_u = \frac{V_u a}{4\pi c^2 \sum_{am} K_2(K_m c)} \left((\lambda_u - \lambda_m) P_{\bar{u}\bar{u}}^* - \frac{4}{3} \frac{V_c}{\Sigma_{au} V_u} P_{\bar{c}\bar{u}}^* - a P_{\bar{u}\bar{u}}^* + a \right)$$

(II.B.3.9)

Remarque : La dimension de θ_u est d'ordre trois en L .

B.3c - Calcul de β

Considérons un réseau infini régulier composé de canaux de type k .
Remplaçons dans chaque barreau la source de fission $\frac{\hat{S}_k \phi}{4\pi}$ par une source isotrope variant linéairement.

Dans le barreau du canal j , l'intensité de cette source sera prise égale à $\frac{(\vec{r} - \vec{r}_j)}{4\pi} \cdot \vec{W}$ où $\vec{W}$ est un vecteur unitaire fixé.

Le flux asymptotique dans le modérateur de la géométrie j a pour expression (compte tenu de (II.B.1.1)) :

$$\phi_{jas}(\vec{r}) = \tilde{\gamma} \phi_{oj}(\vec{r}_j) K_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_j|) - (\tilde{\beta} \vec{\nabla} \phi_{oj}(\vec{r}_j) - \theta_u \vec{W}) \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} K_m K_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_j|) \quad (II.B.3.10)$$

En vertu de l'égalité $\phi_{ok}^{(1)} = \sum_{j \neq k} \phi_j$ et de l'hypothèse de la page 10 on a :

$$\begin{aligned} \phi_{ok}(\vec{r}_k) = & \sum_{j \neq k} \left(\tilde{\gamma} \phi_{oj}(\vec{r}_j) K_0(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \right. \\ & \left. - (\tilde{\beta} \vec{\nabla} \phi_{oj}(\vec{r}_j) - \theta_u \vec{W}) \cdot \frac{(\vec{r}_k - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} K_m K_1(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \right) \end{aligned} \quad (II.B.3.11)$$

et

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k) = & - \sum_{j \neq k} \tilde{\gamma} \phi_{oj}(\vec{r}_j) K_m K_1(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \frac{(\vec{r}_k - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \\ & - \sum_{j \neq k} (\tilde{\beta} \vec{\nabla} \phi_{oj}(\vec{r}_j) - \theta_u \vec{W}) K_m \frac{K_1(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \\ & + \sum_{j \neq k} \left((\tilde{\beta} \vec{\nabla} \phi_{oj}(\vec{r}_j) - \theta_u \vec{W}) \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j) \right) K_m^2 \frac{K_2(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^2} (\vec{r}_k - \vec{r}_j) \end{aligned} \quad (II.B.3.12)$$

La périodicité du réseau et de ses sources impose :

$$\left. \begin{aligned} \phi_{ok}(\vec{r}_k) &= \phi_{oj}(\vec{r}_j) = \phi_o & (II.B.3.13) \\ \vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k) &= \vec{\nabla} \phi_{oj}(\vec{r}_j) = \vec{\nabla} \phi_o & (II.B.3.13a) \end{aligned} \right\} \text{quels que soient } j \text{ et } k$$

⁽¹⁾ Voir ⁽¹⁾ page 22.

Il en résulte que (II.B.3.11) et (II.B.3.12) s'écrivent si le réseau est carré⁽¹⁾ :

$$\phi_0 = \tilde{\gamma} \phi_0 S_0 \quad (\text{II.B.3.11a})$$

$$\vec{\nabla} \phi_0 = - (\tilde{\beta} \vec{\nabla} \phi_0 - \theta_u \vec{W}) S_1 + (\tilde{\beta} \vec{\nabla} \phi_0 - \theta_u \vec{W}) S_2 \quad (\text{II.B.3.12a})$$

car $\sum_{j \neq k} K_1 (K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \frac{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|}$ est nulle, par symétrie du réseau autour du point $\vec{r}_k$.

On a posé :

$$S_1 = \sum_{j \neq k} K_m \frac{K_1 (K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \quad (\text{II.B.3.14})$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} K_m^2 K_2 (K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \quad (\text{II.B.3.15})$$

De (II.B.3.11a) on tire immédiatement : $\phi_0 = 0$ (II.B.3.16)

D'après la relation $\frac{2n}{x} K_n(x) = K_{n+1}(x) - K_{n-1}(x)$ (voir page 88 de [16 B]), on a :

$$S_2 - S_1 = \frac{K_m^2}{2} S_0 \quad (\text{II.B.3.17})$$

(1)

La relation (II.B.3.12a) s'obtient en projetant (II.B.3.12) sur des axes Ox et Oy parallèles aux directions de symétrie d'une section droite du réseau. On utilise les propriétés dues à l'identité des propriétés du réseau carré suivant ces directions :

$$\sum_{j \neq k} K_2 \frac{(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^2} (x_k - x_j)(y_k - y_j) = 0$$

$$\sum_{j \neq k} \frac{K_2 (K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^2} (x_k - x_j)^2 = \sum_{j \neq k} \frac{K_2 (K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^2} (y_k - y_j)^2 = S_2 / K_m^2$$

Compte tenu de cette égalité, (II.B.3.12a) donne :

$$\vec{\nabla} \phi_0 = - \frac{\theta_u \frac{K_m^2}{2} S_0}{1 - \beta \frac{K_m^2}{2} S_0} \vec{W} \quad (\text{II.B.3.18})$$

d'où l'expression de ϕ_{jas} :

$$\phi_{jas}(\vec{r}) = \frac{\theta_u \vec{W}}{1 - \beta \frac{K_m^2}{2} S_0} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} K_m K_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_j|) \quad (\text{II.B.3.19})$$

C'est un flux purement dipolaire.

Dans le modérateur du réseau, en vertu de la relation $\phi = \sum_j \phi_j$, la partie asymptotique du flux total s'écrit donc :

$$\phi_{as}(\vec{r}) = \frac{\theta_u \vec{W} K_m}{1 - \beta \frac{K_m^2}{2} S_0} \cdot \sum_j \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} K_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_j|) \quad (\text{II.B.3.20})$$

Pour $\vec{r}$ situé dans la cellule centrée sur le canal k , les formules d'addition de NEUMANN (voir [16 B]) s'appliquent à toutes les fonctions $K_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_j|)$ pour $j \neq k$ (Le point $\vec{r}$ est alors plus proche du point $\vec{r}_k$ que tous les autres centres de cellule).

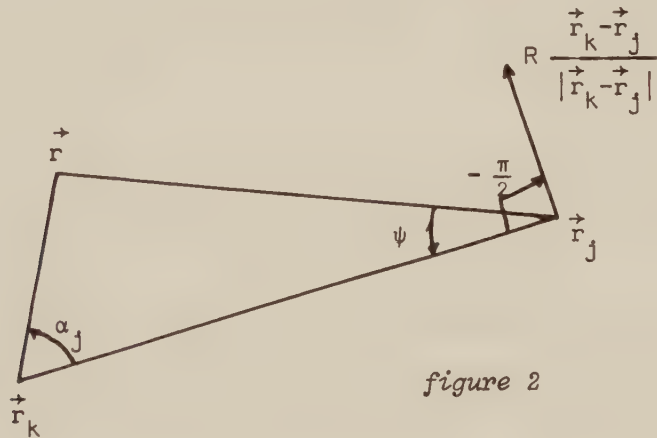
On a pour $j \neq k$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} K_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_j|) &= \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} K_1(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) I_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \\
 &+ \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \sum_{n=1}^{\infty} \left(K_{n+1}(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) + K_{n-1}(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \right) I_n(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \cos n \alpha_j \\
 &+ R \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \sum_{n=1}^{\infty} \left(K_{n+1}(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) - K_{n-1}(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \right) I_n(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \sin n \alpha_j
 \end{aligned}
 \tag{II.B.3.21}$$

On a utilisé la relation :

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} = \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \cos \psi + R \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \sin \psi
 \tag{II.B.3.22}$$

dans laquelle ψ est l'angle qui amène $\vec{r} - \vec{r}_j$ sur $\vec{r}_k - \vec{r}_j$ et R l'opérateur qui symbolise la rotation de $-\frac{\pi}{2}$ dans le plan de section droite.



La substitution de (II.B.3.21) dans (II.B.3.20) donne :

$$\phi_{as}(\vec{r}) = \frac{\theta_u K_m \vec{W}}{1 - \beta \frac{K_m^2}{2} S_o} \cdot \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} K_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} I_n(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \sum_{j \neq k} \left((K_{n+1}(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \vec{\rho}_{-(n+1)}) + K_{n-1}(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \vec{\rho}_{n-1} \right) \right) \quad (II.B.3.23)$$

avec

$$\vec{\rho}_{-(n+1)} = \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} \cos n \alpha_j - R \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \sin n \alpha_j \\ \vec{\rho}_{n-1} = \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} \cos n \alpha_j + R \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \sin n \alpha_j$$

En se reportant à la figure 2, on vérifie aisément que les vecteurs $\vec{\rho}_{-(n+1)}$ et $\vec{\rho}_{n-1}$ se déduisent du vecteur unitaire $\frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|}$ respectivement par une rotation de $-(n+1) \alpha_j$ et une rotation de $+(n-1) \alpha_j$ autour du point $\vec{r}_k$.

Il s'ensuit que dans un réseau carré, invariant par rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour du point $\vec{r}_k$, les sommes $\sum_{j \neq k} K_{n+1}(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \vec{\rho}_{-(n+1)}$ sont nulles sauf pour $(n+1)$ multiple de quatre ; de même les sommes $\sum_{j \neq k} K_{n-1}(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \vec{\rho}_{n-1}$ sont nulles sauf pour $n-1$ multiple de quatre.

Les premiers nombres n positifs tels que $n-1$ ou $n+1$ soient multiples de quatre sont un, trois et cinq.

Le fondamental de la partie asymptotique du flux dans le modérateur de la cellule centrée sur $\vec{r}_k$ a donc pour expression :

$$\phi_{as \text{ fond}}(\vec{r}) = \frac{\theta_u K_m \vec{W}}{1 - \beta \frac{K_m^2}{2} S_o} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} (K_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) - S_o I_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|)) \quad (II.B.3.24)$$

C'est le résultat de l'application de la théorie hétérogène.

Un calcul de cellule, avec l'hypothèse de cylindrification, donnerait pour ce même fondamental, l'expression :

$$\phi_{\text{as fond cell}}(\vec{r}) = \theta_{ub} \vec{W} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} K_m \Delta_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \quad (\text{II.B.3.25})$$

dans laquelle

θ_{ub} est l'analogue de θ_u pour les cellules de rayon fini.

Le calcul de θ_{ub} se calque sur celui de θ_u . On utilise la relation de conservation (II.B.3.4).

On trouve⁽¹⁾ (voir Annexe. H) :

$$\theta_{ub} = \frac{V_u a}{4\pi c^2 \sum_{am} \Delta_2(K_m c)} \left[(\lambda_u - \lambda_m) P_{uu_b}^* - \frac{4}{3} \frac{V_c}{\sum_{au} V_u} P_{cu_b}^* - a P_{uu_b}^* + a \right] \quad (\text{II.B.3.26})$$

où $\Delta_2(K_m \rho) = I_1(K_m b) K_2(K_m \rho) + K_1(K_m b) I_2(K_m \rho)$

L'identification des fondamentaux du flux asymptotique obtenus séparément par la théorie hétérogène et la méthode de calcul de cellule donne :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\theta_u}{1 - \beta \frac{K_m^2}{2} S_0} &= \theta_{ub} I_1(K_m b) \\ S_0 &= \frac{K_1(K_m b)}{I_1(K_m b)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.B.3.27})$$

et encore

⁽¹⁾ L'indice b placé en bas et à droite du symbole représentant une probabilité signifie simplement que cette probabilité a été définie en cellule de rayon fini b .

Il résulte (voir Annexe H) de ces égalités, compte tenu de (II.B.3.9) et (II.B.3.26) que

$$\gamma_{\beta} = - \frac{2}{K_m^2} \frac{I_2(K_m c)}{K_2(K_m c)} \times \frac{1 - \frac{\int_0^c K_m I_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho}{3\Lambda_{dip} \Sigma_{am} I_2(K_m c)}}{1 + \frac{\int_0^c K_m K_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho}{3\Lambda_{dip} \Sigma_{am} K_2(K_m c)}}$$

(II.B.3.28)

$$\text{avec } f(\rho, \Sigma_{tm}, c) = \Sigma_{sm} \lambda_m \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^2 \varphi \epsilon_1(\Sigma_{tm} (\sqrt{r^2 - c^2 \sin^2 \varphi} - c \cos \varphi))$$

(II.B.3.29)

où intervient la fonction de BESSEL intégrale, d'ordre 2, de BICKLEY et NAYLER [17] :

$$\epsilon_1(x) = K_{12}(x) = \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{x}{\sin \theta}} \sin \theta d\theta$$

La "longueur d'extrapolation dipolaire"⁽¹⁾ Λ_{dip} est définie par la relation :

$$\Lambda_{dip} = \frac{\pi(\lambda_m + c) \lambda_m}{6 P^+} \frac{c^2}{a^2}$$

(II.B.3.30)

dans laquelle :

⁽¹⁾ Cette quantité a été introduite uniquement pour faire ressortir la similitude des formules de γ et de β .

$$P^+ = P_u^+ \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u}\right) + \frac{\lambda_c}{\lambda_u} P_c^+ - \frac{a}{\lambda_u} P_{\bar{u}}^+ \quad (\text{II.B.3.31})$$

avec

$$P_u^+ = (\lambda_u - \lambda_m) P_{uu}^+ + \lambda_u \frac{V_c}{V_u} P_{cu}^+ + \frac{3}{4} a \sum_{au} \lambda_u P_{\bar{u}u}^+ + \lambda_m \quad (\text{II.B.3.32})$$

$$\lambda_c P_c^+ = (\lambda_u - \lambda_m) \lambda_c P_{uc}^+ + \lambda_u \frac{V_c}{V_u} \lambda_c P_{cc}^+ + \frac{3}{4} a \sum_{au} \lambda_u \lambda_c P_{\bar{u}c}^+ + \lambda_u \frac{V_c}{V_u} \lambda_m \quad (\text{II.B.3.33})$$

$$P_{\bar{u}}^+ = (\lambda_u - \lambda_m) P_{u\bar{u}}^+ + \lambda_u \frac{V_c}{V_u} P_{c\bar{u}}^+ + \frac{3}{4} a \sum_{au} \lambda_u P_{\bar{u}\bar{u}}^+ - \frac{3}{4} a \sum_{au} \lambda_u \quad (\text{II.B.3.34})$$

Les probabilités P_{ij}^+ ont été introduites plus haut (dans le calcul des P_{ij}^*). Elles s'identifient aux probabilités P_{ij}^* lorsque le modérateur est noir. Elles seront calculées en approximation du flux linéaire (voir paragraphe F.2 de [12]).

En annexe H, on généralise la méthode, employée par BENOIST pour le calcul de la probabilité P_{cc}^* du canal vide (voir paragraphe E.3 de sa thèse [12]), au calcul des probabilités du canal chargé.

On démontre ainsi les égalités :

$$\theta_u = - \frac{V_u a P_{\bar{u}}^+}{3\pi c^2 \sum_{au} \lambda_u \left[\frac{K_m \int_c^\infty K_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho}{3 \Lambda_{dip}} + \sum_{am} K_2(K_m c) \right]}$$

(II.B.3.35)

$$\theta_{ub} = - \frac{V_u a P_u^+}{3\pi c^2 \Sigma_{au} \lambda_u \left(\frac{K_m F(b)}{3 \Lambda_{dip}} + \Sigma_{am} \Delta_2(K_m c) \right)} \quad (\text{II.B.3.36})$$

avec

$$F(b) = \int_c^\infty \Delta_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho \quad (\text{II.B.3.37})$$

et

$$P_u^+ = \frac{\pi c^2}{2 V_u} \lambda_u \lambda_m \left(\frac{1}{\lambda_m} \Gamma_{u_x}^{' +} + \frac{9}{8c} \Gamma_{u_{\Omega_x}}^{' +} \right) \quad (\text{II.B.3.38})$$

$$P_c^+ = \frac{\pi c^2}{2 V_u} \lambda_u \lambda_m \left(\frac{1}{\lambda_m} \Gamma_{c_x}^{' +} + \frac{9}{8c} \Gamma_{c_{\Omega_x}}^{' +} \right) \quad (\text{II.B.3.39})$$

$$P_{\bar{u}}^+ = \frac{\pi c^2}{2 V_u} \lambda_u \lambda_m \left(\frac{1}{\lambda_m} \Gamma_{\bar{u}_x}^{' +} + \frac{9}{8c} \Gamma_{\bar{u}_{\Omega_x}}^{' +} \right) \quad (\text{II.B.3.40})$$

où le symbole $\Gamma_i^{' +}$ (respectivement $\Gamma_{\bar{i}}^{' +}$) représente la probabilité pour un neutron⁽¹⁾ quittant le modérateur d'être capturé fictivement (respectivement suivant le mode x) dans le milieu i sans être retourné dans le modérateur.

La marque distinctive Ω_x ou x placé en bas de la probabilité indique la façon dont le neutron est entré dans le canal.

Si c'est Ω_x , la distribution angulaire entrante est anisotrope et a pour intensité⁽¹⁾ :

$$\frac{8}{3\pi S} \Omega_x$$

(1)

La distribution angulaire entrante $D(\vec{\Omega}, \alpha)$ est normalisée par la double intégration $\int_{S_{canal}} \vec{n}_i dS \cdot \int_{(2\pi)} \Omega_{\Omega_x} D(\vec{\Omega}, \alpha) d\Omega$ où $\vec{n}_i$ est la normale, à la surface, orientée vers l'extérieur. L'intégration angulaire

Suite page suivante.

Si c'est x, la distribution angulaire entrante est isotrope et a pour intensité⁽¹⁾

$$= \frac{3 \cos \alpha}{\pi S}$$

Le calcul des paramètres hétérogènes dipolaires se ramène ainsi au calcul de six probabilités particulières.

Remarques :

1. On peut vérifier aisément qu'à partir de (II.B.3.35) et (II.B.3.36) on retrouve bien (II.B.3.28), compte tenu de (II.B.3.27).

2. Notons que l'expression de β est indépendante de b.

Pour K_m c faible, l'expression (II.B.3.28) se réduit à (voir fin de l'annexe H) :

$$\beta = c^2 b' \quad (II.B.3.41)$$

avec

$$b' = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma + \frac{6 \lambda_{dip}}{\pi \lambda_m}} \quad (II.B.3.42)$$

où

$$\gamma = \frac{c}{\lambda_m}$$

et

$$\gamma = \frac{3\gamma^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^2 \varphi \int_0^{\infty} \epsilon_1(x) \frac{x + \gamma \cos \varphi}{x^2 + 2 \gamma x \cos \varphi + \gamma^2} dx$$

(1)

voir (1) page précédente.

suite du renvoi de la page précédente.

s'étend à l'angle solide (2π) des directions des neutrons entrant dans le canal. On dit que le neutron entre fictivement dans le canal (relativement à la direction Ox).

La formule (II.B.3.42) est la généralisation au cas du canal chargé de la formule -de la "polarisabilité"- donnée par BENOIST dans sa thèse [12] en E.17, dans le cas du canal vide. On vérifie que lorsque le canal est vide

$$\Lambda_{\text{dip}} = \frac{\pi \lambda_m}{6} \quad (\text{II.B.3.43})$$

On a alors, en effet :

$$V_u P^+ = \frac{\lambda_c}{\lambda_u} P_c^+ + V_u$$

et $\Gamma_{c_x}^+ = 2 \frac{c}{\lambda_c}$ $\Gamma_{c_{\Omega_x}}^+ = \frac{16}{9} \frac{c}{\lambda_c}$

(voir paragraphe F.1 de [12]).

On peut donc écrire:

$$\begin{aligned} V_u \frac{\lambda_c}{\lambda_u} P_c^+ &= \frac{\pi c^2}{2} \lambda_m \left(\frac{1}{\lambda_m} \frac{2c}{\lambda_c} + \frac{9}{8c} \times \frac{16}{9} \frac{c}{\lambda_c} \right) \lambda_c \\ &= \pi c^2 (c + \lambda_m) \end{aligned}$$

d'où :

$$\Lambda_{\text{dip}} = \frac{\pi(\lambda_m + c) \lambda_m \pi c^2}{6 \frac{\lambda_c}{\lambda_u} P_c^+ + V_u} = \frac{\pi \lambda_m}{6}$$

3. On montre, à la fin de ce mémoire, au chapitre

IV, que l'application de la présente formulation hétérogène à un réseau régulier infini - dans le modérateur duquel est répartie une source à gradient constant - conduit à l'expression du flux antisymétrique ϕ_{lx} dont dépend le coefficient de diffusion (voir [11]). On en déduit une formule pratique pour le calcul de ce coefficient.

Section C

RECHERCHE DE LA CONDITION DE CRITICITE DU REACTEUR

C.1 - Relations caractéristiques du canal k

Pour que la dépendance du flux angulaire partiel v_k en fonction de v_{ok} soit clairement définie, il reste à déterminer les expressions de σ_{k0} et $\vec{\nabla}\sigma_{k1}$ à partir de $\phi_{ok}(\vec{r}_k)$ et $\vec{\nabla}\phi_{ok}(\vec{r}_k)$.

C.1a - Expression de σ_{k0} en fonction de $\phi_{ok}(\vec{r}_k)$

Compte tenu de (I.6) et (I.7) on a :

$$\phi = \phi_{ok} + \phi_k \quad (\text{II.C.1.1})$$

Le taux d'absorption dans le barreau contenu dans le canal k a donc pour valeur :

$$\Sigma_{au} \int_{V_u} \phi \, dV = \Sigma_{au} \int_{V_u} \phi_{ok} \, dV + \Sigma_{au} \int_{V_u} \phi_k \, dV \quad (\text{II.C.1.2})$$

Or sur l'emplacement du canal k, ϕ_{ok} a pour expression (voir (II.A.19)) :

$$\phi_{ok}(\vec{r}) = I_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \phi_{ok}(\vec{r}_k) + \frac{2}{K_m} I_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \cdot \vec{\nabla}\phi_{ok}(\vec{r}_k) \quad (\text{II.C.1.3})$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \Sigma_{au} \int_{V_u} \phi_{ok} dV &= \Sigma_{au} 2\pi \phi_{ok}(\vec{r}_k) \int_0^a I_0(K_m \rho) \rho d\rho \\ &= \Sigma_{au} \frac{2\pi a}{K_m} I_1(K_m a) \phi_{ok}(\vec{r}_k) \end{aligned} \quad (\text{II.C.1.4})$$

L'intégrale $\Sigma_{au} \int_{V_u} \phi_k dV$ n'est autre que la capture du flux

partiel ϕ_k dans le barreau inclus dans la géométrie k. Compte tenu de l'expression des sources de ϕ_k dans cette géométrie (voir les équations (II.A.2A) et (II.A.3A)), on a :

$$\Sigma_{au} \int_{V_u} \phi_k dV = \sigma_{ko} P_{uu_o}^* V_u + P_o \phi_{ok}(\vec{r}_k) V_u \quad (\text{II.C.1.5})$$

où $P_o V_u$ représente la capture, dans le barreau, due à la source $\mathcal{P}_o$.

Le calcul de P_o est immédiat.

Dans le réseau infini régulier, qui a servi à calculer $\tilde{\gamma}$, l'expression du taux d'absorption dans chaque barreau donnée par la théorie hétérogène est (en accord avec ce qui précède) :

$$\left(\frac{\Sigma_{au} 2\pi a I_1(K_m a)}{K_m} + P_o V_u \right) \phi_o + P_{uu_o}^* V_u$$

Le calcul de cellule donne⁽¹⁾ :

$$P_{uu_{ob}}^* V_u$$

⁽¹⁾ l'indice *l* est introduit pour rappeler la taille finie de la cellule.

L'identification de ces deux expressions conduit à la relation, compte tenu de (II.B.2.11)

$$P_o = \frac{1 - \tilde{\gamma} S_o}{\gamma_u S_o} \left(P_{uu_{ob}}^* - P_{uu_o}^* \right) - \frac{\Sigma_{au} 2\pi a I_1(K_m a)}{K_m V_u} \quad (\text{II.C.1.6})$$

En remplaçant $\tilde{\gamma}$, γ_u , $P_{uu_{ob}}^*$, $P_{uu_o}^*$ et S_o par leurs valeurs respectivement tirées des formules (II.B.2.20), (II.B.2.4), (D.6), (D.7) et (II.B.2.19), on trouve (voir annexe I) :

$$P_o = \frac{2\pi c}{V_u} \left(-\tilde{\gamma} \frac{K_1(K_m c)}{K_m} \Sigma_{am} + \Sigma_{am} \frac{I_1(K_m c)}{K_m} \right) - \frac{\Sigma_{au} 2\pi a I_1(K_m a)}{K_m V_u} \quad (\text{II.C.1.7})$$

Portons cette expression dans (II.C.1.5) et ajoutons membre à membre la relation obtenue à (II.C.1.4) il vient, en vertu de (II.C.1.2) :

$$\Sigma_{au} \int_{V_u} \phi dV = \sigma_{ko} P_{uu_o}^* V_u + P_o \phi_{ok}(\vec{r}_k) V_u \quad (\text{II.C.1.8})$$

avec

$$P_o = \frac{2\pi c}{V_u} \left(-\tilde{\gamma} \frac{K_1(K_m c)}{K_m} \Sigma_{am} + \Sigma_{am} \frac{I_1(K_m c)}{K_m} \right) \quad (\text{II.C.1.9})$$

Or, on a par définition :

$$\sigma_{ko} = \frac{v_{fu} \Sigma_{fu} \int_{V_u} \phi dV}{V_u}$$

Par suite, on peut écrire :

$$\sigma_{ko} = \frac{v_{fu} \sum_{au} f_u}{\sum_{au}} \left(\sigma_{ko} P_{uu_o}^* + p_o \phi_{ok}(\vec{r}_k) \right) \quad (\text{II.C.1.10})$$

La quantité σ_{ko} est ainsi entièrement déterminée en fonction de $\phi_{ok}(\vec{r}_k)$.

Par cohérence avec le formalisme multigroupe, on pose⁽¹⁾ :

$$N_k = \tilde{\gamma}_k \phi_{ok}(\vec{r}_k) + \gamma_{uk} \sigma_{ko} \quad (\text{II.C.1.11})$$

$$\vec{V}_k = -K_m \{ \tilde{\beta}_k \overrightarrow{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k) - \theta_{uk} \overrightarrow{\nabla} \sigma_{k1} \} \quad (\text{II.C.1.12})$$

L'expression (II.B.1.1) de ϕ_{kas} devient :

$$\phi_{kas}(\vec{r}) = N_k K_o (K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) + \vec{V}_k \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} K_1 (K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \quad (\text{II.C.1.13})$$

L'élimination de σ_{ko} entre (II.C.1.10) et (II.C.1.11) conduit à la première relation caractéristique du canal k :

$$a_k^o \phi_{ok}(\vec{r}_k) + c_k^o N_k + \mu (b_k^o \phi_{ok}(\vec{r}_k) + d_k^o N_k) = 0 \quad (\text{II.C.1.14})$$

avec⁽¹⁾ :

$$a_k^o = \tilde{\gamma}_k$$

$$c_k^o = -1$$

⁽¹⁾ l'indice k est introduit pour rappeler l'appartenance au canal k.

$$b_k^o = \frac{v_{fuk} \Sigma_{fuk}}{\Sigma_{auk}} \gamma_{uk} \left(p_{uk} - \frac{\tilde{\gamma}_k}{\gamma_{uk}} p_{uu_{ok}}^* \right)$$

$$d_k^o = \frac{v_{fuk} \Sigma_{fuk}}{\Sigma_{auk}} p_{uu_{ok}}^*$$

On a extrait de v_{fuk} le paramètre μ par lequel il faut multiplier les sources de fission pour rendre le réacteur critique (conformément à l'esprit du chapitre I).

C.1b - Expression de $\overrightarrow{\nabla \sigma}_{k1}$ en fonction de $\overrightarrow{\nabla \phi}_{ok}(\vec{r}_k)$

La composante x de $\overrightarrow{\nabla \sigma}_k$ - dans un système d'axes rectangulaires oxy orthogonal à l'axe du canal k - est définie (voir II.A.20) par l'égalité :

$$\nabla \sigma_{k1x} = \frac{v_{fu} \Sigma_{fu} \int_{V_u} (x - x_k) \phi \, dV}{\int_{V_u} (x - x_k)^2 \, dV} \quad (\text{II.C.1.16})$$

Compte tenu de (II.C.1.1) et (II.C.1.3), cette expression peut encore s'écrire :

$$\nabla \sigma_{k1x} = \frac{v_{fu} \Sigma_{fu}}{\Sigma_{au}} \frac{1}{V_u \frac{a^2}{4}} \left(2 \Sigma_{au} \pi \frac{I_2(K_m a)}{K_m^2} a^2 \nabla \phi_{okx}(\vec{r}_k) + \int_{V_u} \Sigma_{au} \phi_k (x - x_k) \, dV \right) \quad (\text{II.C.1.17})$$

où $\nabla \phi_{okx}(\vec{r}_k)$ est la composante x de $\overrightarrow{\nabla \phi}_{ok}(\vec{r}_k)$.

Le terme $\int_{V_u} \Sigma_{au} \phi_k \frac{(x - x_k)}{a} \, dV$ n'est autre que la capture, suivant

le mode x, du flux partiel ϕ_k dans le barreau inclus dans le canal k (voir paragraphe B.3a du présent chapitre).

Compte tenu de l'expression des sources de ϕ_k (équations (II.A.2A) et (II.A.3A)) on a :

$$\int_{V_U} \sum_{au} \phi_k \frac{(x - x_k)}{a} dV = \frac{V_U a}{4} P_{uu}^* \nabla \sigma_{k1x} + P_1 V_U \nabla \phi_{okx}(\vec{r}_k) \quad (\text{II.C.1.18})$$

où $P_1 V_U$ représente la capture en x , dans le barreau, due à la source $\mathcal{J}_1$ pour laquelle α est l'angle qui amène $\vec{r} - \vec{r}_k$ sur Ox .

Le calcul de P_1 se calque sur celui de P_0 . Considérons le réseau infini régulier qui a servi à calculer $\tilde{\beta}$.

L'expression de la capture en x , dans chaque barreau, donnée par la théorie hétérogène est (d'après ce qui précède) :

$$(2 \sum_{au} \pi a \frac{I_2(K_m a)}{K_m^2} + P_1 V_U) \nabla \phi_{ox} + \frac{V_U a}{4} P_{uu}^* W_x$$

où $\nabla \phi_{ox}$ et W_x sont les composantes x des vecteurs $\vec{\nabla \phi}_0$ et $\vec{W}$.

Le calcul de cellule donne :

$$P_{uu_b}^* - \frac{a V_U}{4} W_x$$

Par identification, compte tenu de l'expression (II.B.3.18) de $\vec{\nabla \phi}_0$ en fonction de $\vec{W}$.

$$P_1 = - \frac{1 - \tilde{\beta} \frac{K_m^2}{2} S_0}{\theta_u \frac{K_m^2}{2} S_0} \frac{a}{4} \left(P_{uu_b}^* - P_{uu}^* \right) - 2 \sum_{au} \frac{\pi a I_2(K_m a)}{K_m^2 V_U}$$

(II.C.1.19)

En annexe H, on démontre les égalités :

$$P_{uu}^* = P_{uu}^+ + \frac{4}{3 \Sigma_{au} \lambda_u^2} \frac{(P_{u-}^+)^2}{P^+} \left(1 - \frac{1}{K_m \int_0^\infty K_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho} \right) \quad (II.C.1.20)$$

$$1 + \frac{c}{3 \Lambda_{dip} \Sigma_{am} K_2(K_m c)}$$

$$P_{uu_b}^* = P_{uu}^+ + \frac{4}{3 \Sigma_{au} \lambda_u^2} \frac{(P_{u-}^+)^2}{P^+} \left(1 - \frac{1}{K_m F(b)} \right) \quad (II.C.1.21)$$

$$1 + \frac{K_m F(b)}{3 \Lambda_{dip} \Sigma_{am} \Delta_2(K_m c)}$$

où F et Δ_2 sont des fonctions qui ont été définies dans la section B § 3c.

On en déduit (voir Annexe I), en remplaçant β , θ_u et S_0 par leurs formules respectives (II.B.3.28), (II.B.3.35) et (II.B.2.19), l'expression pour P_1 :

$$P_1 = - \frac{P_{u-}^+}{P^+} \frac{\pi c^2}{\lambda_u V_u} \left(\Sigma_{am} \beta K_2(K_m c) + \frac{2}{K_m^2} \Sigma_{am} I_2(K_m c) \right) - 2 \Sigma_{au} \pi a \frac{I_2(K_m a)}{K_m^2 V_u} \quad (II.C.1.22)$$

Portons l'expression de P_1 dans (II.C.1.18) ; compte tenu du résultat obtenu, $\nabla \sigma_{k1x}$ s'écrit :

$$\nabla \sigma_{k1x} = \frac{v_{fu} \Sigma_{fu}}{\Sigma_{au}} \left(P_{uu}^* \nabla \sigma_{k1x} + P_1 \nabla \phi_{okx}(\vec{r}_k) \right) \quad (II.C.1.23)$$

avec :

$$p_1 = - \frac{4\pi c^2}{a \lambda_u V_u} \frac{P_u^-}{P^+} \left(\sum_{am} \gamma K_2(K_m c) + \frac{2}{K_m^2} \sum_{am} I_2(K_m c) \right) \quad (\text{II.C.1.24})$$

On aurait pu démontrer de même :

$$\nabla \sigma_{k1y} = \frac{v_{fu} \sum_{fu}}{\sum_{au}} \left(P_{uu}^- \nabla \sigma_{k1y} + p_1 \nabla \phi_{oky}(\vec{r}_k) \right) \quad (\text{II.C.1.23A})$$

où $\nabla \sigma_{k1y}$ et $\nabla \phi_{oky}(\vec{r}_k)$ désignent les composantes y de $\vec{\nabla \sigma}_{k1}$ et de $\vec{\nabla \phi}_{ok}(\vec{r}_k)$.

Il résulte de ces deux relations que l'on peut écrire :

$$\vec{\nabla \sigma}_{k1} = \frac{v_{fu} \sum_{fu}}{\sum_{au}} \left(P_{uu}^- \vec{\nabla \sigma}_{k1} + p_1 \vec{\nabla \phi}_{ok}(\vec{r}_k) \right) \quad (\text{II.C.1.23B})$$

Le vecteur $\vec{\nabla \sigma}_{k1}$ est ainsi entièrement déterminé en fonction de $\vec{\nabla \phi}_{ok}(\vec{r}_k)$.

L'élimination de $\vec{\nabla \sigma}_{k1}$ entre (II.C.1.12) et (II.C.1.23B) conduit à la seconde relation caractéristique du canal k :

$$a_k^1 \vec{\nabla \phi}_{ok}(\vec{r}_k) + c_k^1 \vec{V}_k + \mu \left(b_k^1 \vec{\nabla \phi}_{ok}(\vec{r}_k) + d_k^1 \vec{V}_k \right) = 0 \quad (\text{II.C.1.25})$$

avec ⁽¹⁾ :

⁽¹⁾ voir (1) page 46.

$$\left. \begin{aligned} a_k^1 &= -\tilde{\beta}_k K_m \\ c_k^1 &= -1 \\ b_k^1 &= \frac{v_{fuk} \Sigma_{fuk}}{\Sigma_{auk}} \theta_{uk} K_m \left(p_{1k} + \frac{\tilde{\beta}_k}{\theta_{uk}} P_{uu_k}^* \right) \\ d_k^1 &= \frac{v_{fuk} \Sigma_{fuk}}{\Sigma_{auk}} P_{uu_k}^* \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.C.1.26})$$

On a extrait de v_{fuk} le paramètre critique μ .

Les deux relations (II.C.1.14) et (II.C.1.25) traduisent⁽¹⁾ mathématiquement les capacités d'absorption et de production des neutrons, du canal k dans le réacteur. Leurs coefficients, mis à part le paramètre μ , sont indépendants de la position de ce canal et des propriétés des autres canaux. Dans l'élaboration de la condition de criticité du réacteur, elles suffisent à caractériser les propriétés neutroniques du canal k . Les autres relations, dites de géométrie, ne font intervenir que la position des canaux.

C.2 - Relations géométriques entre les canaux

En vertu de la relation (I.19) et de l'hypothèse de la page 10, on peut écrire (voir (II.B.1.1), (II.C.1.11) et (II.C.1.12)) :

$$\phi_{ok}(\vec{r}_k) = \sum_{j \neq k} \left(N_j K_0(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) + \vec{V}_j \cdot \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} K_1(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \right) \quad (\text{II.C.2.1})$$

et

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k) &= \sum_{j \neq k} \left(-N_j K_m K_1(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \right. \\ &\quad \left. + \vec{V}_j \frac{K_1(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} - (\vec{V}_j \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j)) \frac{K_m K_2(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^2} (\vec{r}_k - \vec{r}_j) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.C.2.2})$$

⁽¹⁾ en approximation dipolaire.

Ces relations définissent le mode d'interaction entre les pôles et dipôles.

C.3 - Condition de criticité du réacteur

On pose :

$$\vec{W}_k = \frac{\vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k)}{K_m} \quad (\text{II.C.3.1})$$

Considérons un système d'axes rectangulaires Oxy dans un plan de section droite du réacteur. Nous noterons V_{kx} et W_{kx} (respectivement V_{ky} et W_{ky}) les projections des vecteurs $\vec{V}_k$ et $\vec{W}_k$ sur l'axe des x (respectivement sur l'axe des y).

Soient N et ϕ_0 les vecteurs colonnes définis par :

$$N = \{N_1, N_2, \dots, N_n, V_{1x}, V_{2x}, \dots, V_{nx}, V_{1y}, V_{2y}, \dots, V_{ny}\} \quad (\text{II.C.3.2})$$

$$\phi_0 = \{\phi_{01}(\vec{r}_1), \phi_{02}(\vec{r}_2), \dots, \phi_{0n}(\vec{r}_n), w_{1x}, w_{2x}, \dots, w_{nx}, w_{1y}, w_{2y}, \dots, w_{ny}\} \quad (\text{II.C.3.3})$$

Le système des relations caractéristiques (II.C.1.14) et (II.C.1.25), correspondant aux n canaux du réacteur, peut se condenser sous la forme :

$$A \phi_0 + CN + \mu(B \phi_0 + DN) = 0 \quad (\text{II.C.3.4})$$

où A, C, B et D sont des matrices carrées diagonales d'ordre 3 n.

On a ⁽¹⁾ pour $1 \leq i \leq n$

⁽¹⁾ il est d'usage de noter M_{ij} l'élément situé à la croisée de la ligne i et de la colonne j d'une matrice M.

$$\left\{ \begin{array}{llll} A_{ii} = a_i^0 & C_{ii} = c_i^0 & B_{ii} = b_i^0 & D_{ii} = d_i^0 \\ A_{i+n,i+n} = K_m a_i^1, & C_{i+n,i+n} = c_i^1, & B_{i+n,i+n} = K_m b_i^1, & D_{i+n,i+n} = d_i^1 \\ A_{i+2n,i+2n} = K_m a_i^1, & C_{i+2n,i+2n} = c_i^1, & B_{i+2n,i+2n} = K_m b_i^1, & D_{i+2n,i+2n} = d_i^1 \end{array} \right.$$

(II.C.3.5)

De même, le système des relations géométriques (II.C.2.1) et (II.C.2.2) s'écrit sous forme matricielle :

$$\boxed{\phi_0 = G N} \quad (II.C.3.6)$$

où G est une matrice carrée symétrique d'ordre 3 n.

On peut partitionner G en 9 sous-matrices carrées d'ordre n :

$$G = \left[\begin{array}{ccc} \text{Pol}(1) & \text{Pol}(2) & \text{Pol}(3) \\ \text{Pol}^T(2) & \text{Pol}(4) & \text{Pol}(6) \\ \text{Pol}^T(3) & \text{Pol}(6) & \text{Pol}(5) \end{array} \right] \quad (II.C.3.7)$$

Le symbole T représente la transposition. Les sous-matrices Pol(1), Pol(4), Pol(5) et Pol(6) sont symétriques, Pol(2) et Pol(3) sont antisymétriques. La diagonale de toutes ces sous-matrices est nulle et on a pour $i \neq j$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Pol}_{i,j}(1) = K_0(z_{ij}) & \text{Pol}_{i,j}(2) = \frac{x_i - x_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} K_1(z_{ij}) \\ \text{Pol}_{i,j}(3) = \frac{y_i - y_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} K_1(z_{ij}) & \text{Pol}_{i,j}(4) = \frac{1}{K_m} \frac{K_1(z_{ij})}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} - (x_i - x_j)^2 \frac{K_2(z_{ij})}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} \\ \text{Pol}_{i,j}(5) = \frac{1}{K_m} \frac{K_1(z_{ij})}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} - (y_i - y_j)^2 \frac{K_2(z_{ij})}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} & \text{Pol}_{i,j}(6) = -(x_i - x_j)(y_i - y_j) \frac{K_2(z_{ij})}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} \end{array} \right.$$

(II.C.3.8)

avec $z_{ij} = K_m |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$.

L'élimination de ϕ_0 entre (II.C.3.4) et (II.C.3.6) conduit à la relation :

$$\boxed{(H + \mu K) N = 0} \quad \text{(II.C.3.9)}$$

dans laquelle

$$\left. \begin{array}{l} H = AG + C \\ K = BG + D \end{array} \right\} \quad \text{(II.C.3.10)}$$

Pour que le réacteur soit critique, il est nécessaire que cette relation soit vérifiée. C'est la condition de criticité du réacteur.

Compte tenu de l'égalité $\mu = \frac{1}{k_{\text{eff}}}$ on pose $\lambda = \frac{1}{\mu}$. La condition de criticité devient :

$$(\lambda H + K) N = 0 \quad \text{(II.C.3.11)}$$

Parmi tous les couples (λ, N) qui réalisent cette condition, un seul présente un intérêt physique : celui dont le λ est le plus grand. Il correspond au mode fondamental de la pile. Trouver ce couple constitue un

problème aux valeurs propres. Ce problème est résolu en machine par une méthode itérative à convergence accélérée. Le principe de cette méthode est exposé dans [18]. Il s'agit d'une amélioration de la méthode de puissance inverse.

Le processus qui consiste à négliger les interactions entre dipôles ainsi que la partie antisymétrique des sources de fission porte le nom d'approximation "podipolaire". C'est une idée de REUSS (cf. [9]). Cela revient à annuler les sous-matrices $\text{Pol}(4)$, $\text{Pol}(5)$ et $\text{Pol}(6)$ et à remplacer les coefficients caractéristiques b_k^1 et d_k^1 par des zéros. Il est facile de voir qu'on peut alors transformer l'équation matricielle (II .C.3.11) d'ordre $3n$ en une équation d'ordre n .

CHAPITRE III - GENERALISATION A LA THEORIE MULTIGROUPE⁽¹⁾⁽²⁾

On reprend les conventions et les hypothèses adoptées au cours du chapitre II.

Section A

COUPLAGE ENTRE LES DIFFERENTS GROUPES OCCASIONNE PAR LE RALENTISSEMENT DANS LE MODERATEUR

Le flux angulaire partiel v_k^g obéit dans la géométrie k aux équations⁽³⁾.

1. dans le modérateur et sur l'emplacement des canaux $j \neq k$:

$$\text{div } \vec{\Omega} v_k^g + \sum_{tm} g v_k^g = \frac{\sum_{sm} g}{4\pi} \phi_k^g + S_m^g \quad (\text{III.A.1})$$

2. dans la cavité :

$$\text{div } \vec{\Omega} v_k^g = Z_{ck}^g \quad (\text{III.A.2})$$

3. dans le barreau :

$$\text{div } \vec{\Omega} v_k^g + \sum_{tuk} g v_k^g = \frac{\sum_{suk} g}{4\pi} \phi_k^g + Z_{uk}^g \quad (\text{III.A.3})$$

avec

$$S_m^g = \frac{1}{4\pi} \sum_{1 \leq g' < g} T_m(g' \rightarrow g) \phi_k^{g'} \quad (\text{III.A.4})$$

(1) La lecture de ce chapitre n'est pas indispensable à la compréhension de la suite de l'exposé.

(2) Pour une première lecture il est conseillé d'imaginer que la théorie est à deux groupes.

(3) voir fin du chapitre I.

$$Z_{ok}^g = \Sigma_{tm}^g v_{ok}^g - \frac{1}{4\pi} \Sigma_{sm}^g \phi_{ok}^g - \frac{1}{4\pi} \sum_{1 \leq g' < g} T_m(g' \rightarrow g) \phi_{ok}^{g'} \quad (\text{III.A.5})$$

$$Z_{uk}^g = (\Sigma_{tm}^g - \Sigma_{tuk}^g) v_{ok}^g - \frac{1}{4\pi} (\Sigma_{sm}^g - \Sigma_{suk}^g) \phi_{ok}^g - \frac{1}{4\pi} \sum_{1 \leq g' < g} T_m(g' \rightarrow g) \phi_{ok}^{g'} + \frac{\hat{S}_k^g \phi}{4\pi} \quad (\text{III.A.6})$$

et

$$\hat{S}_k^g \phi = \sum_{1 \leq g' < g} T_{uk}(g' \rightarrow g) \phi^{g'} + \chi^g \sum_{1 \leq g' \leq NG} v_{fuk}^{g'} \Sigma_{fuk}^{g'} \phi^{g'} \quad (\text{III.A.7})$$

Le flux angulaire v_k^g apparaît comme la solution d'un problème de transport monocinétique avec sources dans le canal et dans le modérateur. Tout ce qui a été dit dans le chapitre précédent s'applique, tout au moins dans les grandes lignes, au calcul de la contribution des sources contenues dans le canal.

On démontre en effet, en raisonnant par récurrence sur la forme de la source S_m^g , la proposition, en trois points, suivante :

a) le flux angulaire v_k^g se compose, dans le modérateur d'une partie asymptotique et d'une perturbation de transport localisée au voisinage de la frontière du canal.

b) cette partie asymptotique a pour expression :

$$v_{kas}^g = \sum_{1 \leq g' \leq g} d_k^{g',g} \quad (\text{III.A.8})$$

dans laquelle :

$$d_k^{g',g}(\vec{r},\vec{\Omega}) = \frac{K_m^{g'}}{\operatorname{argth} \frac{K_m^{g'}}{\Sigma_{tm}^g}} \int_{(\vec{r}-\vec{r}_k) \cdot \vec{u} > 0} f_k^{g',g}(\vec{u}) \frac{e^{-K_m^{g'} \vec{u} \cdot (\vec{r}-\vec{r}_k)}}{4\pi(\Sigma_{tm}^g - K_m^{g'} \vec{u} \cdot \vec{\Omega})} du \quad (\text{III.A.9})$$

avec les mêmes sortes de conventions que pour (II.A.4)

$$\text{et} \quad \frac{\Sigma_{sm}^g}{K_m^g} \operatorname{argth} \frac{K_m^g}{\Sigma_{tm}^g} = 1 \quad (\text{III.A.10})$$

c) Si l'on désigne par $\psi_k^{g',g}$ l'intégrale sur l'angle solide (4π) de $d_k^{g',g}$, on peut écrire, en approximation dipolaire :

$$\psi_k^{g',g}(\vec{r}) = N_k(g',g) K_0(K_m^{g'} |\vec{r} - \vec{r}_k|) + \vec{V}_k(g',g) \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} K_1(K_m^{g'} |\vec{r} - \vec{r}_k|) \quad (\text{III.A.11})$$

avec les relations récurrentes pour $g' \neq g$:

$$N_k(g',g) = K_g^{g'} \sum_{g' \leq g'' < g} T_m(g'' \rightarrow g) N_k(g',g'') \quad (\text{III.A.12})$$

$$\vec{V}_k(g',g) = K_g^{g'} \sum_{g' \leq g'' < g} T_m(g'' \rightarrow g) \vec{V}_k(g',g'') \quad (\text{III.A.13})$$

$$\text{et} \quad K_g^{g'} = \frac{1}{\frac{K_m^{g'}}{\operatorname{argth} \frac{K_m^{g'}}{\Sigma_{tm}^g}} - \Sigma_{sm}^g} \quad (1) \quad (\text{III.A.14})$$

(1) Compte tenu de (III.A.10), le scalaire K_g^g ne pourra être défini que si $K_m^{g'} \neq K_m^g$. On supposera cette condition réalisée par le découpage multi-groupe pour tous les couples g',g d'indices différents. C'est pratiquement toujours le cas.

Nota. En vertu de (III.A.8), on peut écrire :

$$\phi_{kas}^g = \int_{(4\pi)} v_{kas}^g d\Omega = \sum_{1 \leq g' \leq g} \psi_k^{g',g} \quad (\text{III.A.15})$$

Démonstration. La proposition est vraie pour le groupe rapide. Dans ce groupe, il n'y a pas de sources de ralentissement dans le modérateur. Les conclusions et les conventions des sections A et B du chapitre précédent peuvent être reprises sans difficultés. On a donc (voir II.A.4) :

$$v_{kas}^1 = \frac{\Sigma_{sm}^1}{4\pi} \int_{(\vec{r}-\vec{r}_k) \cdot \vec{u} > 0} f_k^1(\vec{u}) \frac{e^{-K_m^1 \vec{u} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_k)}}{\Sigma_{tm}^1 - K_m^1 \vec{u} \cdot \vec{\Omega}} du \quad (\text{III.A.16})$$

et en approximation dipolaire :

$$\phi_{kas}^1 = N_k(1,1) K_o(K_m^1 |\vec{r} - \vec{r}_k|) + \vec{V}_k(1,1) \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} K_1(K_m^1 |\vec{r} - \vec{r}_k|) \quad (\text{III.A.17})$$

avec

$$N_k(1,1) = \gamma_k^{1,1} \phi_{ok}^1(\vec{r}_k) + \gamma_{uk}^1 \sigma_{ko}^1 \quad (\text{III.A.18})$$

$$\vec{V}_k(1,1) = -K_m^1 (\beta_k^{1,1} \vec{\nabla} \phi_{ok}^1(\vec{r}_k) - \theta_{uk}^1 \vec{\nabla} \sigma_{k1}^1) \quad (\text{III.A.19})$$

Supposons la proposition vraie pour tous les groupes g' d'énergie supérieure à celle du groupe g ($1 \leq g' < g$) et démontrons la pour le groupe g .

La source S_m^g , s'exprimant à partir des flux des groupes supérieurs, comprend une partie asymptotique et une perturbation de transport localisée au voisinage de la frontière du canal.

Cette partie asymptotique s'écrit en vertu de (III.A.4), (III.A.11) et (III.A.15) :

$$S_{\text{mas}}^g = \frac{1}{4\pi} \sum_{1 \leq g'' < g} T_m(g'' \rightarrow g) \left(\sum_{1 \leq g' < g''} (N_k(g', g'') K_0(K_m^{g'} |\vec{r} - \vec{r}_k|) + \vec{V}_k(g', g'') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} K_1(K_m^{g'} |\vec{r} - \vec{r}_k|)) \right) \quad (\text{III.A.20})$$

ou encore :

$$S_{\text{mas}}^g = \frac{1}{4\pi} \sum_{1 \leq g' < g} \left[\left(\sum_{g' \leq g'' < g} T_m(g'' \rightarrow g) N_k(g', g'') \right) K_0(K_m^{g'} |\vec{r} - \vec{r}_k|) + \left(\sum_{g' \leq g'' < g} T_m(g'' \rightarrow g) \vec{V}_k(g', g'') \right) \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} K_1(K_m^{g'} |\vec{r} - \vec{r}_k|) \right] \quad (\text{III.A.21})$$

C'est une somme d'expressions de la forme :

$$S_{\text{mas}}^{g', g} = \frac{1}{4\pi} \left(A(g', g) K_0(K_m^{g'} |\vec{r} - \vec{r}_k|) + \vec{B}(g', g) \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} K_1(K_m^{g'} |\vec{r} - \vec{r}_k|) \right)$$

Grâce à la linéarité de l'équation de BOLTZMANN, la partie du flux v_k^g créé par la source S_{mas}^g est une superposition de solutions de problèmes du type suivant :

On considère la cellule de rayon infini constituée par la géométrie k avec les caractéristiques monocinétiques du groupe g . Il n'y a pas de source dans le canal. Dans le modérateur est répartie la source d'intensité $S_{\text{mas}}^{g', g}$ ($g' \neq g$).

Question : Quel est le flux angulaire ζ^g régnant dans la cellule ?

Ce flux obéit aux équations :

1. dans le modérateur

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{\Omega} \zeta^g + \sum_{tm}^g \zeta^g = \frac{\sum_{sm}^g}{4\pi} \psi^g + \frac{1}{4\pi} (A(g', g) K_0(K_m^{g'} |\vec{r} - \vec{r}_k|)) \\ + \vec{B}(g', g) \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} K_1(K_m^{g'} |\vec{r} - \vec{r}_k|) \end{aligned} \quad (\text{III.A.22})$$

2. dans la cavité

$$\operatorname{div} \vec{\Omega} \zeta^g = 0 \quad (\text{III.A.23})$$

3. dans le barreau

$$\operatorname{div} \vec{\Omega} \zeta^g + \sum_{tuk}^g \zeta^g = \frac{\sum_{suk}^g}{4\pi} \psi^g \quad (\text{III.A.24})$$

où ψ^g est le flux scalaire associé à ζ^g .

Ce problème est un problème de résolution d'équation différentielle linéaire avec second membre. On le résout, en Annexe J, suivant le processus classique. On recherche d'abord une solution particulière ζ_1^g de l'équation (III.A.22). Cette solution⁽¹⁾ est soustraite de ζ^g . Le reste ζ_2^g est un flux angulaire qui satisfait à l'équation du transport sans source dans le modérateur mais avec source dans le canal. Pour trouver la solution particulière de (III.A.22) on utilise la propriété (déjà signalée au chapitre II - section A) des fonctions de BESSEL de se décomposer en exponentielles. On peut écrire en effet :

(1)

prolongée dans le canal avec une valeur convenable pour éviter toute singularité.

$$S_{mas}^{g',g} = \frac{1}{4\pi} \int_{(\vec{r}-\vec{r}_k) \cdot \vec{u} > 0} S^{g',g}(\vec{u}) e^{-K_m^{g'} \vec{u} \cdot (\vec{r}-\vec{r}_k)} du \quad (III.A.26)$$

Cela étant, on montre que dans le modérateur :

$$\zeta_1^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) = K_g^{g'} \int_{(\vec{r}-\vec{r}_k) \cdot \vec{u} > 0} S^{g',g}(\vec{u}) \frac{\Sigma_{sm}^g + \frac{1}{K_g^{g'}}}{4\pi(\Sigma_{tm}^g - K_m^{g'} \vec{u} \cdot \vec{\Omega})} e^{-K_m^{g'} \vec{u} \cdot (\vec{r}-\vec{r}_k)} du \quad (III.A.27)$$

La constante $K_g^{g'}$, dont la formule est donnée plus haut en (III.A.14) a été calculée de telle sorte que :

$$\int_{(4\pi)} d\Omega \frac{\Sigma_{sm}^g + \frac{1}{K_g^{g'}}}{4\pi(\Sigma_{tm}^g - K_m^{g'} \vec{u} \cdot \vec{\Omega})} = 1 \quad (III.A.28)$$

On a :

$$\Sigma_{sm}^g + \frac{1}{K_g^{g'}} = \frac{K_m^{g'}}{\argth \frac{K_m^{g'}}{\Sigma_{tm}^g}} \quad (III.A.29)$$

Compte tenu de (III.A.26), (III.A.27) et (III.A.28) le flux scalaire $\psi_1^g = \int_{(4\pi)} \zeta_1^g d\Omega$ a pour expression dans le modérateur :

$$\psi_1^g(\vec{r}) = K_g^{g'} \left[A(g',g) K_0(K_m^{g'} |\vec{r} - \vec{r}_k|) + B(g',g) \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} K_1(K_m^{g'} |\vec{r} - \vec{r}_k|) \right] \quad (III.A.30)$$

D'un autre côté, étant donnée sa définition, le flux angulaire ζ_2^g se compose dans le modérateur d'une perturbation de transport localisée à la frontière du canal et d'une partie asymptotique (voir chapitre II section A). Cette partie asymptotique est de la forme :

$$\zeta_{2\text{as}}^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\Sigma_{sm}^g}{4\pi} \int_{(\vec{r}-\vec{r}_k) \cdot \vec{u} > 0} f(\vec{u}) \frac{e^{-K_m^g \vec{u} \cdot (\vec{r}-\vec{r}_k)}}{\Sigma_{tm}^g - K_m^g \vec{u} \cdot \vec{\Omega}} du \quad (\text{III.A.31})$$

On montre⁽¹⁾, en Annexe J, que l'intégration sur l'angle solide (4π) de $\zeta_{2\text{as}}^g$ donne :

$$\psi_{2\text{as}}^g(\vec{r}) = \mu_k(g' \rightarrow g) A(g', g) K_0(K_m^g |\vec{r}-\vec{r}_k|) + \pi_k(g' \rightarrow g) \vec{B}(g', g) \cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}_k}{|\vec{r}-\vec{r}_k|} K_1(K_m^g |\vec{r}-\vec{r}_k|) \quad (\text{III.A.32})$$

avec

$$\mu_k(g' \rightarrow g) = - \frac{k_g^{g'} (\Sigma_{am}^g - \frac{1}{k_g^{g'}}) \frac{K_1(K_m^{g'} c)}{K_m^{g'}} + \Sigma_{auk}^g \gamma_{uk}^g h_k(g' \rightarrow g)}{\frac{\Sigma_{am}^g K_1(K_m^g c)}{K_m^g}} \quad (\text{III.A.33})$$

$$\pi_k(g' \rightarrow g) = - \frac{k_g^{g'} (\Sigma_{am}^g - \frac{1}{k_g^{g'}}) \frac{K_2(K_m^{g'} c)}{K_m^{g'}} c + \beta_{ok}^g K_m^g \ell_k(g' \rightarrow g)}{\frac{\Sigma_{am}^g K_2(K_m^g c)}{K_m^g} c} \quad (\text{III.A.34})$$

(1)

par un calcul analogue à celui de γ_u et de θ_u (voir § B.2 b et B.3 b du chapitre précédent).

et

$$\Sigma_{am}^g = \Sigma_{tm}^g - \Sigma_{sm}^g \quad (\text{III.A.35})$$

$$\Sigma_{auk}^g = \Sigma_{tuk}^g - \Sigma_{suk}^g \quad (\text{III.A.36})$$

$$\beta_{ok}^g = - \Sigma_{auk}^g \frac{\lambda_{uk}^g}{a} \frac{p_k^{+g}}{p_{\bar{u}k}^{+g}} \theta_{uk}^g \quad (\text{III.A.37})$$

$$h_k(g' \rightarrow g) = \frac{K_m^g K_1(K_m^g c) K_o(K_m^{g'} c) - K_m^{g'} K_1(K_m^{g'} c) K_o(K_m^g c)}{K_m^{g^2} - K_m^{g'^2}} \quad (\text{III.A.38})$$

$$\ell_k(g' \rightarrow g) = \frac{K_m^g K_1(K_m^{g'} c) K_o(K_m^g c) - K_m^{g'} K_1(K_m^g c) K_o(K_m^{g'} c)}{K_m^{g^2} - K_m^{g'^2}} \quad (\text{III.A.39})$$

Les quantités γ_{uk}^g , θ_{uk}^g , λ_{uk}^g , p_k^{+g} et $p_{\bar{u}k}^{+g}$, sans les indices k et g ont été définies au chapitre précédent. Les indices k et g ont été rajoutés ici pour spécifier que les caractéristiques monocinétiques de la géométrie k sont celles du groupe g . Les rayons du canal k et de son barreau sont toujours désignés respectivement par c et a .

Compte tenu de la solution apportée à ce problème-type et de ce qui a été dit auparavant, on conclut que la fraction de ϕ_k^g créée par la source S_{mas}^g , soit ϕ_{k1}^g , possède dans le modérateur une partie asymptotique qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \phi_{k1as}^g = & \sum_{1 \leq g' < g} K_m^{g'} \left[\left(\sum_{g' \leq g'' < g} T_m(g'' \rightarrow g) N_k(g', g'') \right) K_0(K_m^{g'} |\vec{r} - \vec{r}_k|) \right. \\
 & + \left. \left(\sum_{g' \leq g'' < g} T_m(g'' \rightarrow g) \vec{V}_k(g', g'') \right) \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} K_1(K_m^{g'} |\vec{r} - \vec{r}_k|) \right] \\
 & + \left[\sum_{1 \leq g' < g} \mu_k(g' \rightarrow g) \left(\sum_{g' \leq g'' < g} T_m(g'' \rightarrow g) N_k(g', g'') \right) \right] K_0(K_m^g |\vec{r} - \vec{r}_k|) \\
 & + \left[\sum_{1 \leq g' < g} \pi_k(g' \rightarrow g) \left(\sum_{g' \leq g'' < g} T_m(g'' \rightarrow g) \vec{V}_k(g', g'') \right) \right] \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} K_1(K_m^g |\vec{r} - \vec{r}_k|)
 \end{aligned}
 \tag{III.A.40}$$

Compte tenu de (III.A.10), (III.A.27), (III.A.29) et (III.A.31), l'expression asymptotique du flux angulaire v_{k1}^g correspondant à ϕ_{k1}^g est du type (III.A.8).

L'autre partie du flux angulaire v_k^g est due à la perturbation de transport de S_m^g et aux sources Z_{ck}^g et Z_{uk}^g localisées au canal.

Hypothèse :

On admettra qu'on peut négliger la perturbation de transport⁽¹⁾ de S_m^g .

Le flux angulaire v_{k2}^g créé par les sources Z_{ck}^g et Z_{uk}^g obéit, dans le modérateur, à l'équation du transport sans sources. Dans ce milieu, v_{k2}^g comprend donc, lui aussi, une perturbation de transport localisée au voisinage du canal et une partie asymptotique. Celle-ci peut s'écrire comme celle de ζ_2^g :

(1)

De toute façon, elle est prise en compte globalement par l'intermédiaire de la partie asymptotique de S_m^g . En effet, les paramètres hétérogènes sont calculés en projetant les sources contenues dans le canal sur le flux asymptotique dans le modérateur (voir le calcul de γ_u et de θ_u dans la section B du chapitre II). On assure ainsi la conservation des neutrons de groupe à groupe.

$$v_{k2as}^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\Sigma_{s0}^g}{4\pi} \int_{(\vec{r}-\vec{r}_k) \cdot \vec{u} > 0} f(\vec{u}) \frac{e^{-K_m^g \vec{u} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_k)}}{\Sigma_{tm}^g - K_m^g \vec{u} \cdot \vec{\Omega}} du \quad (III.A.41)$$

et si l'on se contente du premier ordre dans le développement en série de Fourier de Z_{ck}^g et Z_{uk}^g autour de l'axe du canal, le flux scalaire correspondant a une expression de la forme :

$$\phi_{k2as}^g(\vec{r}) = M_k^g K_0(K_m^g |\vec{r} - \vec{r}_k|) + \vec{T}_k^g \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} K_1(K_m^g |\vec{r} - \vec{r}_k|) , \quad (III.A.42)$$

les quantités scalaires M_k^g et vectorielle $\vec{T}_k^g$ restant à être déterminées.

Finalement, compte tenu de l'égalité implicitement admise

$$v_k^g = v_{k1}^g + v_{k2}^g ,$$

le flux angulaire partiel v_k^g , dans le modérateur, se compose d'une perturbation de transport localisée au voisinage de la frontière du canal et d'une partie asymptotique. Celle-ci est du type (III.A.8) et le flux scalaire correspondant est égal à (cf. (III.A.40) et (III.A.42)) :

$$\phi_{kas}^g(\vec{r}) = \sum_{1 \leq g' \leq g} \left(N_k(g', g) K_0(K_m^{g'} |\vec{r} - \vec{r}_k|) + \vec{V}_k(g', g) \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} K_1(K_m^{g'} |\vec{r} - \vec{r}_k|) \right) \quad (III.A.43)$$

avec pour $g' \neq g$

$$N_k(g', g) = K_g^{g'} \sum_{g' \leq g'' < g} T_m(g'' \rightarrow g) N_k(g', g'') \quad (III.A.44)$$

$$\vec{V}_k(g', g) = k_{g'}^{g'} \sum_{g' \leq g'' < g} T_m(g'' \rightarrow g) \vec{V}_k(g', g'') \quad (\text{III.A.45})$$

et pour $g' = g$

$$N_k(g, g) = \sum_{1 \leq g' < g} \mu_k(g' \rightarrow g) \left(\sum_{g' \leq g'' < g} T_m(g'' \rightarrow g) N_k(g', g'') \right) + M_k^g \quad (\text{III.A.46})$$

$$\vec{V}_k(g, g) = \sum_{1 \leq g' < g} \pi_k(g' \rightarrow g) \left(\sum_{g' \leq g'' < g} T_m(g'' \rightarrow g) \vec{V}_k(g', g'') \right) + \vec{T}_k^g \quad (\text{III.A.47})$$

On retrouve en (III.A.44) et (III.A.45), les relations⁽¹⁾ (III.A.12) et (III.A.13).

La proposition est démontrée.

Pour g' fixé, on écrit la relation (III.A.12) pour tous les indices g allant de $g' + 1$ à NG . On obtient le système homogène triangulaire :

$$N_k(g', g'+1) = k_{g'+1}^{g'} T_m(g' \rightarrow g'+1) N_k(g', g')$$

$$N_k(g', g'+2) = k_{g'+2}^{g'} T_m(g' \rightarrow g'+2) N_k(g', g') + k_{g'+2}^{g'+1} T_m(g'+1 \rightarrow g'+2) N_k(g', g'+1)$$

$$N_k(g', NG) = k_{NG}^{g'} T_m(g' \rightarrow NG) N_k(g', g') + \dots + k_{NG}^{g'} T_m(NG-1 \rightarrow NG) N_k(g', NG-1)$$

La résolution d'un tel système, en fonction de $N_k(g', g')$ est immédiate. On peut écrire :

$$N_k(g', g) = m(g', g) N_k(g', g')$$

(III.A.48)

où $m(g', g)$ est un scalaire indépendant de la valeur de N_k .

⁽¹⁾ voir page suivante.

On a :

$$m(g', g'+1) = k_{g'+1}^{g'} T_m(g' \rightarrow g'+1)$$

et si l'on pose :

$$m(g, g) = 1 \quad (\text{III.A.49})$$

$m(g', g)$ est lui-même solution du système récurrent :

$$m(g', g) = k_g^{g'} \sum_{g' \leq g'' < g} T_m(g'' \rightarrow g) m(g', g'') \quad (\text{III.A.50})$$

Les relations (III.A.12) et (III.A.13) étant formellement équivalentes, on a également :

$$\boxed{\vec{V}_k(g', g) = m(g', g) \vec{V}_k(g', g')} \quad (\text{III.A.51})$$

Compte tenu de (III.A.11), on peut écrire en conséquence :

$$\psi_k^{g', g} = m(g', g) \psi_k^{g', g'} \quad (\text{III.A.52})$$

Les relations (III.A.46) et (III.A.47) deviennent :

[1]

Ces relations sont tout à fait rigoureuses. Si l'on n'avait pas négligé la perturbation de transport de S^g , on aurait dû ajouter à (III.A.43) un flux asymptotique du genre de ${}^m \phi_{k2as}^g$. Il suffit, pour s'en rendre compte, de remplacer par la pensée la source $S^{g', g}$ par cette perturbation dans le problème type considéré plus haut. La solution particulière serait elle-même une perturbation de transport.

$$N_k(g, g) = \sum_{1 \leq g' < g} \mu_k(g' \rightarrow g) \frac{m(g', g)}{k_{g'}} N_k(g', g') + M_k^g \quad (\text{III.A.46A})$$

$$\vec{V}_k(g, g) = \sum_{1 \leq g' < g} \pi_k(g' \rightarrow g) \frac{m(g', g)}{k_{g'}} \vec{V}_k(g', g') + \vec{T}_k^g \quad (\text{III.A.47A})$$

Section B

DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FOURIER DES SOURCES DE COMPENSATION AUTOUR DE L'AXE DU CANAL k

Nous admettrons, à nouveau, l'hypothèse de la page 10. Sur l'emplacement E_k du canal k, nous pouvons donc écrire, compte tenu de (I.18), (I.19), (III.A.8), (III.A.9) et (III.A.15) :

$$v_{ok}^g = \sum_{1 \leq g' \leq g} d_{ok}^{g',g} \quad (\text{III.B.1})$$

$$\text{et} \quad \phi_{ok}^g = \sum_{1 \leq g' \leq g} \psi_{ok}^{g',g} \quad (\text{III.B.2})$$

avec

$$d_{ok}^{g',g} = \sum_{j \neq k} \frac{K_m^{g'}}{\text{argth} \frac{K_m^{g'}}{\Sigma_{tm}^g}} \int_{(\vec{r}-\vec{r}_j) \cdot \vec{u} > 0} f_j^{g',g}(\vec{u}) \frac{e^{-K_m^{g'} \vec{u} \cdot (\vec{r}-\vec{r}_j)}}{4\pi(\Sigma_{tm}^g - K_m^{g'} \vec{u} \cdot \vec{\Omega})} du \quad (\text{III.B.3})$$

$$\text{et} \quad \psi_{ok}^{g',g} = \sum_{j \neq k} \psi_j^{g',g} = \int_{(4\pi)} d_{ok}^{g',g} d\Omega \quad (\text{III.B.4})$$

L'expression (III.B.3) de $d_{ok}^{g',g}$ est très semblable à celle de (II.A. 8) de v_{ok} monocinétique. Le procédé qui a été utilisé pour développer v_{ok} en série de FOURIER paraît tout indiqué pour développer $d_{ok}^{g',g}$. On obtient, à l'ordre un, en fonction de l'angle qui amène $\vec{r} - \vec{r}_k$ sur le gradient $\vec{\nabla} \psi_{ok}^{g',g}(\vec{r}_k)$ de $\psi_{ok}^{g',g}$ au point $\vec{r} = \vec{r}_k$:

$$d_{ok}^{g',g}(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{1}{2} a_{ok}^{g',g}(|\vec{r} - \vec{r}_k|, \varphi, \theta) \psi_{ok}^{g',g}(\vec{r}_k) - \frac{1}{K_m^{g'}} \left(a_{1,1}^{g',g}(|\vec{r} - \vec{r}_k|, \varphi, \theta) \vec{\nabla} \psi_{ok}^{g',g}(\vec{r}_k) + a_{1,2}^{g',g}(|\vec{r} - \vec{r}_k|, \varphi, \theta) R \vec{\nabla} \psi_{ok}^{g',g}(\vec{r}_k) \right) \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \quad (\text{III.B.5})$$

avec

$$a_0^{g',g}(\rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{\pi} \frac{K_m^{g'}}{\text{argth} \frac{K_m^{g'}}{\Sigma_{tm}^g}} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-K_m^{g'} \rho \cos \alpha_0}}{4\pi(\Sigma_{tm}^g - K_m^{g'} \cos(\alpha_0 + \varphi) \sin \theta)} d\alpha_0 \quad (\text{III.B.6})$$

$$a_{1,1}^{g',g}(\rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{\pi} \frac{K_m^{g'}}{\text{argth} \frac{K_m^{g'}}{\Sigma_{tm}^g}} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-K_m^{g'} \rho \cos \alpha_0}}{4\pi(\Sigma_{tm}^g - K_m^{g'} \cos(\alpha_0 + \varphi) \sin \theta)} \cos \alpha_0 d\alpha_0 \quad (\text{III.B.7})$$

$$a_{1,2}^{g',g}(\rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{\pi} \frac{K_m^{g'}}{\text{argth} \frac{K_m^{g'}}{\Sigma_{tm}^g}} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-K_m^{g'} \rho \cos \alpha_0}}{4\pi(\Sigma_{tm}^g - K_m^{g'} \cos(\alpha_0 + \varphi) \sin \theta)} \sin \alpha_0 d\alpha_0 \quad (\text{III.B.8})$$

Les symboles φ , θ et R ont la même signification que dans la section A du chapitre II.

En vertu de (III.A.28) et (III.A.29), il vient :

$$\int_{(4\pi)} a_0^{g',g} d\Omega = 2 I_0(K_m^{g'} \rho) \quad (\text{III.B.9})$$

$$\int_{(4\pi)} a_{1,1}^{g',g} d\Omega = -2 I_1(K_m^{g'} \rho) \quad (\text{III.B.10 A})$$

$$\int_{(4\pi)} a_{1,2}^{g',g} d\Omega = 0 \quad (\text{III.B.10 B})$$

Si l'on intègre (III.B.5) sur l'angle solide (4π) , on obtient en conséquence :

$$\psi_{ok}^{g',g}(\vec{r}) = I_0(K_m^{g'} |\vec{r}-\vec{r}_k|) \psi_{ok}^{g',g}(\vec{r}_k) + \frac{2}{K_m^{g'}} I_1(K_m^{g'} |\vec{r}-\vec{r}_k|) \vec{\nabla} \psi_{ok}^{g',g}(\vec{r}_k) \cdot \frac{(\vec{r}-\vec{r}_k)}{|\vec{r}-\vec{r}_k|} \quad (\text{III.B.11})$$

Cette égalité, comparable à (II.A.19), aurait pu être obtenue directement à partir de (III.A.11) et (III.B.4), en appliquant la formule d'addition de NEUMANN des fonctions de BESSEL (voir §B.2b et B.3c du chapitre II).

D'après (III.A.52) et (III.B.4), on a :

$$\psi_{ok}^{g',g} = m(g',g) \psi_{ok}^{g',g'} \quad (\text{III.B.12})$$

Compte tenu de (III.B.2), on peut donc écrire - sur l'emplacement E_k du canal k - :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq g'' < g} T_m(g'' \rightarrow g) \phi_{ok}^{g''} &= \sum_{1 \leq g'' < g} T_m(g'' \rightarrow g) \sum_{1 \leq g' \leq g''} m(g',g'') \psi_{ok}^{g',g'} \\ &= \sum_{1 \leq g' < g} \psi_{ok}^{g',g'} \left(\sum_{g' \leq g'' < g} T_m(g'' \rightarrow g) m(g',g'') \right) \end{aligned}$$

De (III.A.50) on tire :

$$\sum_{g' \leq g'' < g} T_m(g'' \rightarrow g) m(g',g'') = \frac{m(g',g)}{K_g^{g'}} \quad (\text{III.B.13})$$

Il vient finalement :

$$\sum_{1 \leq g' < g} T_m(g' \rightarrow g) \phi_{ok}^{g'} = \sum_{1 \leq g' < g} \frac{m(g', g)}{k_{g'}^g} \psi_{ok}^{g', g'} \quad (\text{III.B.14})$$

$$= \sum_{1 \leq g' < g} \frac{1}{k_{g'}^g} \psi_{ok}^{g', g} \quad (\text{III.B.15})$$

Nous admettons, comme en formulation monocinétique, qu'il est légitime de calculer $\hat{S}_k^g \phi$ en approximation du flux linéaire.

Nous poserons :

$$\hat{S}_k^g \phi = \sigma_{ko}^g + (\vec{r} - \vec{r}_k) \cdot \vec{\nabla} \sigma_{k1}^g \quad (\text{III.B.16})$$

Compte tenu de (III.B.1), (III.B.2), (III.B.5), (III.B.11), (III.B.15) et (III.B.16), les expressions (III.A.6) et (III.A.7) de Z_{ck}^g et Z_{uk}^g deviennent :

$$\begin{aligned} Z_{ck}^g = & \sum_{1 \leq g' \leq g} z_0^{g', g}(\Sigma_{tm}^g, \Sigma_{sm}^g) \psi_{ok}^{g', g}(\vec{r}_k) - \sum_{1 \leq g' \leq g} \left(z_1^{g', g}(\Sigma_{tm}^g, \Sigma_{sm}^g) \frac{\vec{\nabla} \psi_{ok}^{g', g}(\vec{r}_k)}{K_{g'}^g} \right. \\ & \left. + z_2^{g', g}(\Sigma_{tm}^g) \frac{R \vec{\nabla} \psi_{ok}^{g', g}(\vec{r}_k)}{K_{g'}^g} \right) \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \end{aligned} \quad (\text{III.B.17})$$

$$\begin{aligned} Z_{uk}^g = & \sum_{1 \leq g' \leq g} z_0^{g', g}(\Sigma_{tm}^g - \Sigma_{tuk}^g, \Sigma_{sm}^g - \Sigma_{suk}^g) \psi_{ok}^{g', g}(\vec{r}_k) + \frac{\sigma_{ko}^g}{4\pi} \\ & - \sum_{1 \leq g' \leq g} \left(z_1^{g', g}(\Sigma_{tm}^g - \Sigma_{tuk}^g, \Sigma_{sm}^g - \Sigma_{suk}^g) \frac{\vec{\nabla} \psi_{ok}^{g', g}(\vec{r}_k)}{K_{g'}^g} \right. \\ & \left. + z_2^{g', g}(\Sigma_{tm}^g - \Sigma_{tuk}^g) \frac{R \vec{\nabla} \psi_{ok}^{g', g}(\vec{r}_k)}{K_{g'}^g} \right) \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} + (\vec{r} - \vec{r}_k) \cdot \frac{\vec{\nabla} \sigma_{k1}^g}{4\pi} \end{aligned} \quad (\text{III.B.18})$$

avec

$$z_0^{g',g}(t,s) = \frac{t}{2} a_0^{g',g}(|\vec{r} - \vec{r}_k|, \varphi, \theta) - \frac{s + \frac{1 - \delta^{g',g}}{k^{g'}}}{4\pi} I_0(K_m^{g'} |\vec{r} - \vec{r}_k|)$$

(III.B.19)

$$z_1^{g',g}(t,s) = t a_{1,1}^{g',g}(|\vec{r} - \vec{r}_k|, \varphi, \theta) + \frac{s + \frac{1 - \delta^{g',g}}{k^{g'}}}{2\pi} I_1(K_m^{g'} |\vec{r} - \vec{r}_k|)$$

(III.B.20)

$$z_2^{g',g}(t) = t a_{1,2}^{g',g}(|\vec{r} - \vec{r}_k|, \varphi, \theta)$$

(III.B.21)

où $\delta^{g',g}$ est le symbole de KRONECKER.

Comme on peut le constater aisément, les éléments constitutifs des développements en série de FOURIER de Z_{ck}^g et Z_{uk}^g sont construits sur le modèle de ceux des développements en série de FOURIER des sources de v_k monocinétique.

Section C

CONTRIBUTION DES SOURCES CONTENUES DANS LE CANAL k AU NIVEAU DU GROUPE g

L'expression asymptotique, dans le modérateur, de la partie du flux ϕ_k^g créé par les sources Z_{ck}^g et Z_{uk}^g se note ϕ_{k2as}^g (conformément aux notations de la section A du présent chapitre).

Compte tenu de la remarque, faite à la fin de la section précédente, l'expression (II.B.1.1) de ϕ_{kas} se généralise facilement et donne :

$$\begin{aligned} \phi_{k2as}^g(\vec{r}) = & \left(\sum_{1 \leq g' \leq g} \tilde{\gamma}_k^{g',g} \psi_{ok}^{g',g}(\vec{r}_k) + \gamma_{uk}^g \sigma_{ko}^g \right) K_0(K_m^g |\vec{r} - \vec{r}_k|) \\ & - \left(\sum_{1 \leq g' \leq g} \tilde{\beta}_k^{g',g} \nabla \psi_{ok}^{g',g}(\vec{r}_k) - \theta_{uk}^g \nabla \sigma_{k1}^g \right) \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} K_1(K_m^g |\vec{r} - \vec{r}_k|) \end{aligned}$$

(III.C.1)

où $\tilde{\gamma}_k^{g',g}$ et $\tilde{\beta}_k^{g',g}$ sont les transposés des paramètres $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\beta}$.

Plus précisément - dans la cellule de rayon infini constituée par la géométrie k avec les caractéristiques monocinétiques du groupe g - :

le paramètre $\tilde{\gamma}_k^{g',g}$ est le coefficient par lequel il faut multiplier la fonction $K_0(K_m^g |\vec{r} - \vec{r}_k|)$ pour obtenir, dans le modérateur, l'expression asymptotique du flux créé par la source $\mathcal{Y}_{ok}^{g',g}$ localisée au canal, d'intensité :

$$\begin{aligned} & Z_0^{g',g}(\Sigma_{tm}^g, \Sigma_{sm}^g) \text{ dans la cavité} \\ & Z_0^{g',g}(\Sigma_{tm}^g - \Sigma_{tuk}^g, \Sigma_{sm}^g - \Sigma_{suk}^g) \text{ dans le barreau ;} \end{aligned}$$

le paramètre $\beta_k^{g',g}$ est le coefficient par lequel il faut multiplier la fonction $K_m^g K_1(K_m^g |\vec{r} - \vec{r}_k|) \cos \alpha$ pour obtenir, dans le modérateur, l'expression asymptotique du flux créé par la source $\mathcal{J}_{1k}^{g',g}$, localisée au canal, d'intensité :

$$\frac{1}{K_m^g} \left(z_1^{g',g}(\Sigma_{tm}^g, \Sigma_{sm}^g) \cos \alpha + z_2^{g',g}(\Sigma_{tm}^g) \sin \alpha \right) \quad \text{dans la cavité}$$

$$\frac{1}{K_m^g} \left(z_1^{g',g}(\Sigma_{tm}^g - \Sigma_{tuk}^g, \Sigma_{sm}^g - \Sigma_{suk}^g) \cos \alpha + z_2^{g',g}(\Sigma_{tm}^g - \Sigma_{tuk}^g) \sin \alpha \right)$$

dans le barreau

Les paramètres γ_{uk}^g et β_{uk}^g ont été définis dans la section A du présent chapitre.

On écrit les résultats de la section B du chapitre II, lorsque la géométrie k a les caractéristiques monocinétiques du groupe g. Cela donne :

$$\gamma_{uk}^g = \frac{K_m^g}{\Sigma_{auk}^g (3 \Lambda_k^g \Sigma_{am}^g K_1(K_m^g c) + K_m^g K_o(K_m^g c))} \quad (\text{III.C.2})$$

$$\theta_{uk}^g = - \frac{V_u a P_{u_k}^{+g}}{3\pi c^2 \Sigma_{auk}^g \lambda_{uk}^g \left(\frac{K_m^g \int_c^\infty K_1(K_m^g \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}^g, c) d\rho}{3 \Lambda_k^g \text{dip}} + \Sigma_{am}^g K_2(K_m^g c) \right)} \quad (\text{III.C.3})$$

$$\gamma_k^{g,g} = \frac{I_1(K_m^g c)}{K_1(K_m^g c)} \frac{1 - \frac{K_m^g I_o(K_m^g c)}{3 \Lambda_k^g \Sigma_{am}^g I_1(K_m^g c)}}{1 + \frac{K_m^g K_o(K_m^g c)}{3 \Lambda_k^g \Sigma_{am}^g K_1(K_m^g c)}} \quad (\text{III.C.4})$$

$$\gamma_{\beta k}^{g,g} = - \frac{2}{(K_m^g)^2} \frac{I_2(K_m^g c)}{K_2(K_m^g c)} \frac{1 - \frac{c}{3 \Lambda_{k \text{ dip}}^g \Sigma_{am}^g I_2(K_m^g c)}}{1 + \frac{c}{3 \Lambda_{k \text{ dip}}^g \Sigma_{am}^g K_2(K_m^g c)}} \frac{K_m^g \int_0^\infty I_1(K_m^g \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}^g, c) d\rho}{K_m^g \int_0^\infty K_1(K_m^g \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}^g, c) d\rho} \quad (\text{III.C.5})$$

où Λ_k^g et $\Lambda_{k \text{ dip}}^g$ désignent, respectivement, les longueurs d'extrapolation polaire et dipolaire du canal k , au niveau du groupe g (voir chapitre II, § B.2 a et § B.3 c). La fonction f est définie en (II.B.3.29).

On obtient⁽¹⁾ en annexe K la généralisation des formules (III.C.4) et (III.C.5) au cas où g' n'est forcément égal à g :

$$\gamma_{\beta k}^{g',g} = \frac{K_m^g}{K_m^{g'}} \frac{\left(\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{K_g^{g'}} \right)}{\Sigma_{am}^g} \frac{I_1(K_m^{g'} c)}{K_1(K_m^{g'} c)} \times \frac{1 - \frac{K_m^{g'} I_0(K_m^{g'} c)}{3 \Lambda_k^g \left(\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{K_g^{g'}} \right) I_1(K_m^{g'} c)}}{1 + \frac{K_m^g K_0(K_m^g c)}{3 \Lambda_k^g \Sigma_{am}^g K_1(K_m^g c)}} \quad (\text{III.C.6})$$

$$\gamma_{\beta k}^{g',g} = - \frac{2}{(K_m^{g'})^2} \frac{\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{K_g^{g'}}}{\Sigma_{am}^g} \frac{I_2(K_m^{g'} c)}{K_2(K_m^{g'} c)} \frac{1 - \frac{K_m^{g'} \int_0^\infty I_1(K_m^{g'} \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}^g, c) d\rho}{3 \Lambda_{k \text{ dip}}^g \left(\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{K_g^{g'}} \right) I_2(K_m^{g'} c)}}{1 + \frac{c}{3 \Lambda_{k \text{ dip}}^g \Sigma_{am}^g K_2(K_m^g c)}} \frac{K_m^g \int_0^\infty K_1(K_m^g \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}^g, c) d\rho}{K_m^{g'} \int_0^\infty K_1(K_m^{g'} \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}^g, c) d\rho} \quad (\text{III.C.7})$$

(1) On applique le formalisme probabiliste de BENOIST aux neutrons créés respectivement par les sources $\mathcal{S}_0^{g,g}$ et $\mathcal{S}_1^{g,g}$.

Section D

RECHERCHE DE LA CONDITION DE CRITICITE DU REACTEUR

D.1 - Relations caractéristiques du canal k

En identifiant (III.A.42) à (III.C.1), on obtient :

$$M_k^g = \sum_{1 \leq g' \leq g} \gamma_k^{g',g} \psi_{ok}^{g',g}(\vec{r}_k) + \gamma_{uk}^g \sigma_{ko}^g \quad (\text{III.D.1.1})$$

$$\vec{T}_k^g = -K_m^g \left(\sum_{1 \leq g' \leq g} \beta_k^{g',g} \overrightarrow{\nabla \psi_{ok}^{g',g}(\vec{r}_k)} - \theta_{uk}^g \overrightarrow{\nabla \sigma_{k1}^g} \right) \quad (\text{III.D.1.2})$$

En substituant dans (III.A.46 A) et (III.A.47 A), il vient, compte tenu de (III.B.12) :

$$N_k(g,g) = \sum_{1 \leq g' \leq g} m(g',g) \left(\mu_k(g' \rightarrow g) \frac{1 - \delta_{k,g',g}^{g',g}}{K_g^{g',g}} N_k(g',g') + \gamma_k^{g',g} \psi_{ok}^{g',g}(\vec{r}_k) \right) + \gamma_{uk}^g \sigma_{ko}^g \quad (\text{III.D.1.3})$$

$$\vec{V}_k(g,g) = \sum_{1 \leq g' \leq g} m(g',g) \left(\pi_k(g' \rightarrow g) \frac{1 - \delta_{k,g',g}^{g',g}}{K_g^{g',g}} \vec{V}_k(g',g') - K_m^g \beta_k^{g',g} \overrightarrow{\nabla \psi_{ok}^{g',g}(\vec{r}_k)} \right) + K_m^g \theta_{uk}^g \overrightarrow{\nabla \sigma_{k1}^g} \quad (\text{III.D.1.4})$$

Ces formules constituent la généralisation à tous les groupes des formules (III.A.18) et (III.A.19) obtenues pour le groupe rapide.

D.1a Calcul de σ_{ko}^g

Le calcul de σ_{ko}^g se ramène au calcul du taux d'absorption du barreau inclus dans le canal k, au niveau de chacun des groupes.

En effet, si V_u désigne la section droite de ce barreau, on a, par définition :

$$\sigma_{ko}^g = \frac{1}{V_u} \int_{V_u} \hat{S}_k^g(\phi) dV \quad (\text{III.D.1.5})$$

En vertu de (I.23), cela s'écrit :

$$\sigma_{ko}^g = \frac{1}{V_u} \sum_{1 \leq g' < g} \frac{T_{uk}(g' \rightarrow g)}{\Sigma_{auk}^{g'}} \int_{V_u} \Sigma_{auk}^{g'} \phi^{g'} dV + \frac{\chi^g}{V_u} \sum_{1 \leq g' \leq NG} \frac{v_{fuk}^{g'} \Sigma_{fuk}^{g'}}{\Sigma_{auk}^{g'}} \int_{V_u} \Sigma_{auk}^{g'} \phi^{g'} dV \quad (\text{III.D.1.6})$$

On utilisera la relation

$$\phi^g = \phi_{ok}^g + \phi_k^g \quad (\text{III.D.1.7})$$

Elle résulte de (I.6) et (I.7).

Compte tenu de (III.B.2) et (III.B.11), il vient :

$$\int_{V_u} \Sigma_{auk}^g \phi_{ok}^g dV = \sum_{1 \leq g' \leq g} 2\pi \Sigma_{auk}^g \frac{I_1(K_m^{g'} a)}{K_m^{g'}} a \psi_{ok}^{g',g}(\vec{r}_k) \quad (\text{III.D.1.8})$$

Le flux partiel ϕ_k^g se compose de la contribution ϕ_{k1}^g de la source S_m^g , répartie dans le modérateur, et de la contribution ϕ_{k2}^g des sources Z_{ck}^g et Z_{uk}^g contenues dans le canal :

$$\phi_k^g = \phi_{k1}^g + \phi_{k2}^g \quad (\text{III.D.1.9})$$

Le calcul de $\int_{V_u} \Sigma_{auk}^g \phi_{k1}^g dV$ est immédiat.

On démontre, par réciprocity, en annexe J que la capture⁽¹⁾ dans le barreau due à la source $S_{mas}^{g',g}$ a pour valeur :

$$2\pi c \Sigma_{auk}^g \gamma_{uk}^g A(g',g) h_k(g' \rightarrow g)$$

La formule de h_k a été donnée en (III.A.38).

Par suite, compte tenu de (III.A.21) et de l'hypothèse de la page 64, on a :

$$\int_{V_u} \Sigma_{auk}^g \phi_{k1}^g dV = 2\pi c \Sigma_{auk}^g \gamma_{uk}^g \sum_{1 \leq g' < g} h_k(g' \rightarrow g) \left[\sum_{g' \leq g'' < g} T_m(g'' \rightarrow g) N_k(g', g'') \right]$$

ce qui donne, après remplacement de $\sum_{g' \leq g'' < g} T_m(g'' \rightarrow g) N_k(g', g'')$ par son expression tirée de (III.A.12) :

$$\int_{V_u} \Sigma_{auk}^g \phi_{k1}^g dV = 2\pi c \Sigma_{auk}^g \gamma_{uk}^g \sum_{1 \leq g' < g} \frac{h_k(g' \rightarrow g)}{k_g^{g'}} N_k(g', g) \quad (\text{III.D.1.10})$$

(1) Voir page 59.

Le calcul de $\int_{V_u} \Sigma_{auk}^g \phi_{k_2}^g dV$ s'inspire de celui qui a été fait au chapitre II § C.1 a pour obtenir l'expression de $\int_{V_u} \Sigma_{au} \phi_k dV$ en théorie monocinétique.

L'analyse des développements en série de FOURIER (III.B.17) et (III.B.18) de Z_{ck}^g et Z_{uk}^g nous conduit à écrire :

$$\int_{V_u} \Sigma_{auk}^g \phi_{k_2}^g dV = P_{uu_{ok}}^{*g} V_u \sigma_{ku}^g + \sum_{1 \leq g' \leq g} V_u P_{ok}^{g',g} \psi_{ok}^{g',g}(\vec{r}_k) \quad (\text{III.D.1.11})$$

où $P_{ok}^{g',g} V_u$ représente la capture dans le barreau due à la source $\gamma_{ok}^{g',g}$,

et $P_{uu_{ok}}^{*g}$ la probabilité $P_{uu_o}^*$, définie au chapitre II, relative à la cellule de rayon infini, constituée de la géométrie k avec les caractéristiques monocinétiques du groupe g.

On montre, en annexe K, que $P_{ok}^{g',g}$ a pour expression :

$$P_{ok}^{g',g} = \frac{2\pi c}{V_u} \left(-\gamma_k^{g',g} \frac{K_1(K_m^g c)}{K_m^g} \Sigma_{am}^g + \left(\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{K_g^{g'}} \right) \frac{I_1(K_m^{g'} c)}{K_m^{g'}} \right) - \frac{2\pi a}{V_u} \frac{I_1(K_m^{g'} a)}{K_m^{g'}} \Sigma_{auk}^g \quad (\text{III.D.1.12})$$

Cette formule est à comparer avec celle (II.C.1.7) qui a été obtenue en théorie monocinétique pour P_o .

En ajoutant, membre à membre, les relations (III.D.1.8), (III.D.1.10) et (III.D.1.11), compte tenu de (III.D.1.12) on obtient :

$$\int_{V_u} \Sigma_{auk}^g \phi^g dV = V_u \left(P_{uu_{ok}}^{*g} \sigma_{ku}^g + \sum_{1 \leq g' \leq g} p_{ok}(g' \rightarrow g) \psi_{ok}^{g',g}(\vec{r}_k) + \frac{2\pi c}{V_u} \Sigma_{auk}^g \gamma_{uk}^g \sum_{1 \leq g' < g} \frac{h_k(g' \rightarrow g)}{K_g^{g'}} N_k(g', g) \right) \quad (\text{III.D.1.13})$$

avec

$$p_{ok}(g' \rightarrow g) = \frac{2\pi c}{V_u} \left(-\gamma_k^{g',g} \frac{K_1(K_m^{g'} c)}{K_m^{g'}} \Sigma_{am}^g + \left(\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{K_g^{g'}} \right) \frac{I_1(K_m^{g'} c)}{K_m^{g'}} \right) \quad (\text{III.D.1.14})$$

L'élimination de σ_{ko}^g entre (III.D.1.3) et (III.D.1.13) conduit, compte tenu de (III.A.48) et (III.B.12), à :

$$\frac{1}{V_u} \int_{V_u} \Sigma_{auk}^g \phi^g dV = \sum_{1 \leq g' \leq g} \left(r_{uk}^o(g' \rightarrow g) \psi_{ok}^{g',g}(\vec{r}_k) + t_{uk}^o(g' \rightarrow g) N_k(g', g') \right) \quad (\text{III.D.1.15})$$

avec

$$r_{uk}^o(g' \rightarrow g) = m(g', g) \left(p_{ok}(g' \rightarrow g) - \frac{\gamma_k^{g',g}}{\gamma_{uk}^g} P_{uu_{ok}}^{*g} \right) \quad (\text{III.D.1.16})$$

et

$$t_{uk}^o(g' \rightarrow g) = m(g', g) \left(\frac{P_{uu_{ok}}^{*g}}{\gamma_{uk}^g} \delta^{g',g} + \frac{(1 - \delta^{g',g})}{K_g^{g'}} \left(\frac{2\pi c}{V_u} \Sigma_{auk}^g \gamma_{uk}^g h_k(g' \rightarrow g) - \frac{\mu_k(g' \rightarrow g)}{\gamma_{uk}^g} P_{uu_{ok}}^{*g} \right) \right) \quad (\text{III.D.1.17})$$

En portant ce résultat dans (III.D.1.6), on trouve finalement :

$$\begin{aligned} \sigma_{k0}^g = & \sum_{1 \leq g'' < g} \frac{T_{uk}(g'' \rightarrow g)}{\Sigma_{auk}^{g''}} \sum_{1 \leq g' \leq g''} \left(r_{uk}^0(g' \rightarrow g'') \psi_{ok}^{g', g'}(\vec{r}_k) + t_{uk}^0(g' \rightarrow g'') N_k(g', g') \right) \\ & + \mu \chi^g \sum_{1 \leq g'' \leq NG} \eta_k^{g''} \sum_{1 \leq g' \leq g''} \left(r_{uk}^0(g' \rightarrow g'') \psi_{ok}^{g', g'}(\vec{r}_k) + t_{uk}^0(g' \rightarrow g'') N_k(g', g') \right) \end{aligned} \quad (III.D.1.18)$$

On a posé :

$$\eta_k^g = \frac{v_{fuk}^g \Sigma_{fuk}^g}{\Sigma_{auk}^g} \quad (III.D.1.19)$$

On a extrait de v_{fuk}^g le paramètre μ par lequel il faut multiplier les sources de fission pour rendre le réacteur critique.

Substituant (III.D.1.18) dans (III.D.1.3), on obtient la relation qui caractérise "en polaire" le canal k , au niveau du groupe g :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq g' \leq g} \left(a_k^0(g' \rightarrow g) \psi_{ok}^{g', g'}(\vec{r}_k) + c_k^0(g' \rightarrow g) N_k(g', g') \right) \\ + \mu \chi^g \sum_{1 \leq g' \leq NG} \left(b_k^0(g' \rightarrow g) \psi_{ok}^{g', g'}(\vec{r}_k) + d_k^0(g' \rightarrow g) N_k(g', g') \right) = 0 \end{aligned} \quad (III.D.1.20)$$

dans laquelle :

$$a_k^0(g' \rightarrow g) = m(g', g) \tilde{\gamma}_k^{g', g} + \gamma_{uk}^g (1 - \delta^{g', g}) \sum_{g' \leq g'' < g} \frac{T_{uk}(g'' \rightarrow g)}{\Sigma_{auk}^{g''}} r_{uk}^0(g' \rightarrow g'') \quad (III.D.1.21)$$

$$c_k^0(g' \rightarrow g) = -\delta_{g',g} + (1 - \delta_{g',g}) \left(\frac{m(g',g) \mu_k(g' \rightarrow g)}{k_{g'}^g} + \gamma_{uk}^g \sum_{g' \leq g'' < g} \frac{T_{uk}(g'' \rightarrow g)}{\Sigma_{auk}^{g''}} t_{uk}^0(g' \rightarrow g'') \right) \quad (\text{III.D.1.22})$$

$$b_k^0(g' \rightarrow g) = \gamma_{uk}^g \sum_{g' \leq g'' \leq NG} \eta_k^{g''} r_{uk}^0(g' \rightarrow g'') \quad (\text{III.D.1.23})$$

$$d_k^0(g' \rightarrow g) = \gamma_{uk}^g \sum_{g' \leq g'' \leq NG} \eta_k^{g''} t_{uk}^0(g' \rightarrow g'') \quad (\text{III.D.1.24})$$

D.1 b Calcul de $\overrightarrow{\nabla \sigma_{k1}^g}$

La composante x de $\overrightarrow{\nabla \sigma_{k1}^g}$ est définie (voir (II.A.20)) - dans un système d'axes rectangulaires Oxy orthogonal à l'axe du canal $\hat{z}$ par l'égalité :

$$\nabla \sigma_{k1x}^g = \frac{\int_{V_u} \hat{S}_k^g(\phi)(x - x_k) dV}{\int_{V_u} (x - x_k)^2 dV} \quad (\text{III.D.1.25})$$

Compte tenu de (I.23), il vient :

$$\nabla \sigma_{k1x}^g = \frac{1}{V_u \frac{a^2}{4}} \left(\sum_{1 \leq g' < g} \frac{T_{uk}(g' \rightarrow g)}{\Sigma_{auk}^{g'}} \int_{V_u} \Sigma_{auk}^{g'} \phi^{g'}(x - x_k) dV + \chi^g \sum_{1 \leq g' \leq NG} \eta_k^{g'} \int_{V_u} \Sigma_{auk}^{g'} \phi^{g'}(x - x_k) dV \right) \quad (\text{III.D.1.26})$$

Le calcul de $\nabla \sigma_{k1x}^g$ se ramène à celui de $\int_{V_u} \Sigma_{auk}^g \phi^g \frac{(x - x_k)}{a} dV$. Cette expression peut s'écrire, en utilisant la propriété (III.D.1.7) :

$$\int_{V_u} \Sigma_{auk}^g \phi_k^g \frac{(x - x_k)}{a} dV = \int_{V_u} \Sigma_{auk}^g \phi_{ok}^g \frac{(x - x_k)}{a} dV + \int_{V_u} \Sigma_{auk}^g \phi_k^g \frac{(x - x_k)}{a} dV$$

(III.D.1.27)

De (III.B.2) et (III.B.11), on déduit :

$$\int_{V_u} \Sigma_{auk}^g \phi_{ok}^g \frac{(x - x_k)}{a} dV = \sum_{1 \leq g' \leq g} \Sigma_{auk}^g \frac{2\pi a I_2(K_m^{g'} a)}{(K_m^{g'})^2} \nabla \psi_{okx}^{g',g}(\vec{r}_k)$$

(III.D.1.28)

où $\nabla \psi_{okx}^{g',g}(\vec{r}_k)$ est la composante x du vecteur $\vec{\nabla \psi_{ok}^{g',g}(\vec{r}_k)}$.

Le terme $\int_{V_u} \Sigma_{auk}^g \phi_k^g \frac{(x - x_k)}{a} dV$ n'est autre que la capture en x dans le barreau⁽¹⁾ du flux partiel ϕ_k^g .

On montre, en annexe J, que la capture en x due à la source $S_{mas}^{g',g}$ a pour valeur⁽²⁾ :

$$\pi c \frac{\Sigma_{auk}^g \theta_{uk}^g K_m^g}{a} B_x(g',g) l_k(g' \rightarrow g)$$

où B_x est la composante x du vecteur $\vec{B}$.

La formule de l_k a été donnée en (III.A.39).

Par suite, compte tenu de (III.A.21) et de l'hypothèse de la page 64, on a :

$$\int_{V_u} \Sigma_{auk}^g \phi_{k1}^g \frac{(x - x_k)}{a} dV = \pi c \frac{\Sigma_{auk}^g \theta_{uk}^g K_m^g}{a} \sum_{1 \leq g' < g} l_k(g' \rightarrow g) \sum_{g' \leq g'' < g} T_m(g'' \rightarrow g) V_{kx}(g',g'')$$

⁽¹⁾ cf. § B.3a du chapitre II.

⁽²⁾ voir page 59.

où V_{kx} est la composante x du vecteur $\vec{V}_k$.

Après remplacement de $\sum_{g' \leq g'' < g} T_m(g'' \rightarrow g) V_{kx}(g', g'')$ par sa valeur

tirée de (III.A.13), il vient :

$$\int_{V_u} \Sigma_{auk}^g \phi_{k1}^g \frac{(x - x_k)}{a} dV = \frac{\pi c}{a} \Sigma_{auk}^g \theta_{uk}^g K_m^g \sum_{1 \leq g' < g} \frac{\ell_k(g' \rightarrow g)}{K_g^{g'}} V_{kx}(g', g) \quad (\text{III.D.1.29})$$

Il reste d'après (III.D.1.9) à calculer :

$$\int_{V_u} \Sigma_{auk}^g \phi_{k2}^g \frac{(x - x_k)}{a} dV$$

L'analyse des développements en série de FOURIER (III.B.17) et (III.B.18) nous conduit à écrire :

$$\int_{V_u} \Sigma_{auk}^g \phi_{k2}^g \frac{(x - x_k)}{a} dV = P_{\bar{u}\bar{u}_k}^{*g} \frac{V_u a}{4} \nabla \sigma_{k1x}^g + \sum_{1 \leq g' \leq g} V_u P_{1k}^{g',g} \nabla \psi_{okx}^{g',g}(\vec{r}_k) \quad (\text{III.D.1.30})$$

où $P_{1k}^{g',g} V_u$ représente la capture en x dans le barreau due à la source $\psi_{1k}^{g',g}$ pour laquelle α est l'angle qui amène $\vec{r} - \vec{r}_k$ sur ox et $P_{\bar{u}\bar{u}_k}^{*g}$ la probabilité

$P_{\bar{u}\bar{u}_k}^{*g}$, définie au chapitre II, relative à la cellule de rayon infini constituée par la géométrie k avec les caractéristiques monocinétiques du groupe g .

On montre en annexe K que $P_{1k}^{g',g}$ a pour expression :

$$P_{1k}^{g',g} = - \frac{P_{\bar{u}\bar{u}_k}^{*g}}{P_k^{*g}} \cdot \frac{\pi c^2}{\lambda_{uk}^g V_u} \left[\Sigma_{am}^g \gamma_{\beta_k}^{g',g} K_2(K_m^g c) + 2 \left(\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta_{g',g}}{K_g^{g'}} \right) \frac{I_2(K_m^{g'} c)}{(K_m^{g'})^2} \right] - \frac{2\pi a}{V_u} \Sigma_{auk}^g \frac{I_2(K_m^{g'} a)}{(K_m^{g'})^2} \quad (\text{III.D.1.31})$$

Cette formule est à comparer à celle (II.C.1.22) qui a été obtenue en théorie monocinétique pour P_1 .

En ajoutant membre à membre les relations (III.D.1.28), (III.D.1.29) et (III.D.1.30), compte tenu de (III.D.1.31) on obtient :

$$\int_{V_u} \Sigma_{auk}^g \phi^g \frac{(x - x_k)}{a} dV = \frac{V_u a}{4} \left(P_{\bar{u}\bar{u}_k}^{*g} \nabla \sigma_{k1x}^g + \sum_{1 \leq g' \leq g} P_{1k}(g' \rightarrow g) \nabla \psi_{okx}^{g',g}(\vec{r}_k) \right. \\ \left. + \frac{4\pi c \Sigma_{auk}^g \theta_{uk}^g K_m^g}{a^2 V_u} \sum_{1 \leq g' < g} \frac{\ell_k(g' \rightarrow g)}{K_g^{g'}} V_{kx}(g', g) \right) \quad (III.D.1.32)$$

avec

$$P_{1k}(g' \rightarrow g) = - \frac{4 P_{\bar{u}\bar{u}_k}^{*g}}{P_k^{*g}} \frac{\pi c^2}{\lambda_{uk}^g a V_u} \left(\Sigma_{am}^g \lambda_k^{g',g} K_2(K_m^g c) + 2 \left(\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{K_g^{g'}} \right) \frac{I_2(K_m^g c)}{(K_m^g)^2} \right) \quad (III.D.1.33)$$

L'élimination de $\nabla \sigma_{k1x}^g$ entre (III.D.1.4), projetée sur l'axe des x , et (III.D.1.32) conduit à (1) :

$$\int_{V_u} \Sigma_{auk}^g \phi^g \frac{(x - x_k)}{a} dV = \frac{V_u a}{4} \sum_{1 \leq g' \leq g} \left(r_{uk}^1(g' \rightarrow g) \nabla \psi_{okx}^{g',g}(\vec{r}_k) \right. \\ \left. + t_{uk}^1(g' \rightarrow g) V_{kx}(g', g') \right) \quad (III.D.1.34)$$

avec

$$r_{uk}^1(g' \rightarrow g) = m(g', g) \left(P_{1k}(g' \rightarrow g) + \frac{\lambda_k^{g',g}}{\theta_{uk}^g} P_{\bar{u}\bar{u}_k}^{*g} \right) \quad (III.D.1.35)$$

(1) Compte tenu de (III.A.51) et (III.B.12).

et

$$t_{uk}^1(g' \rightarrow g) = m(g', g) \left(\frac{P_{\overline{uu}_k}^{*g}}{K_m^g \theta_{uk}^g} \delta^{g', g} + \frac{1 - \delta^{g', g}}{K_g^{g'}} \left(\frac{4\pi c \sum_{auk}^g \theta_{uk}^g K_m^g}{a^2 V_u} \ell_k(g' \rightarrow g) - \frac{\pi \kappa(g' \rightarrow g)}{\theta_{uk}^g K_m^g} P_{\overline{uu}_k}^{*g} \right) \right) \quad (\text{III.D.1.36})$$

En portant ce résultat dans (III.D.1.26) on trouve finalement :

$$\begin{aligned} \nabla_{o_{k1x}}^g &= \sum_{1 \leq g'' < g} \frac{T_{uk}(g'' \rightarrow g)}{\sum_{auk}^{g''}} \left(\sum_{1 \leq g' \leq g''} r_{uk}^1(g' \rightarrow g'') \nabla_{\psi_{okx}^{g', g'}}^{g', g'}(\vec{r}_k) + t_{uk}^1(g' \rightarrow g'') V_{kx}(g', g'') \right) \\ &+ \mu \chi^g \sum_{1 \leq g'' \leq NG} \eta_k^{g''} \left(\sum_{1 \leq g' \leq g''} r_{uk}^1(g' \rightarrow g'') \nabla_{\psi_{okx}^{g', g'}}^{g', g'}(\vec{r}_k) + t_{uk}^1(g' \rightarrow g'') V_{kx}(g', g'') \right) \end{aligned} \quad (\text{III.D.1.37})$$

On a extrait de ψ_{uk}^g le paramètre μ par lequel il faut multiplier les sources de fission pour rendre le réacteur critique. Il est clair que la même relation aurait pu être établie entre les composantes y des vecteurs $\overline{\nabla_{o_{k1}}^g}$, $\overline{\nabla_{\psi_{ok}^{g', g}}^{g', g}}(\vec{r}_k)$ et $\vec{V}_k(g, g)$. On en déduit la relation vectorielle :

$$\begin{aligned} \overline{\nabla_{o_{k1}}^g} &= \sum_{1 \leq g'' < g} \frac{T_{uk}(g'' \rightarrow g)}{\sum_{auk}^{g''}} \sum_{1 \leq g' \leq g''} \left(r_{uk}^1(g' \rightarrow g'') \overline{\nabla_{\psi_{ok}^{g', g'}}^{g', g'}}(\vec{r}_k) + t_{uk}^1(g' \rightarrow g'') \vec{V}_k(g', g') \right) \\ &+ \mu \chi^g \sum_{1 \leq g'' \leq NG} \eta_k^{g''} \sum_{1 \leq g' \leq g''} \left(r_{uk}^1(g' \rightarrow g'') \overline{\nabla_{\psi_{ok}^{g', g'}}^{g', g'}}(\vec{r}_k) + t_{uk}^1(g' \rightarrow g'') \vec{V}_k(g', g') \right) \end{aligned} \quad (\text{III.D.1.37A})$$

Substituant (III.D.1.37A) dans (III.D.1.4), on obtient la relation qui caractérise les propriétés dipolaires du canal k au niveau du groupe g :

$$\sum_{1 \leq g' \leq g} \left(a_k^1(g' \rightarrow g) \overrightarrow{\nabla \psi_{ok}^{g',g}}(\vec{r}_k) + c_k^1(g' \rightarrow g) \vec{V}_k(g',g') \right) + \mu \chi^g \sum_{1 \leq g' \leq NG} \left(b_k^1(g' \rightarrow g) \overrightarrow{\nabla \psi_{ok}^{g',g}}(\vec{r}_k) + d_k^1(g' \rightarrow g) \vec{V}_k(g',g') \right) = 0 \quad (\text{III.D.1.38})$$

dans laquelle :

$$a_k^1(g' \rightarrow g) = -m(g',g) K_m^g \gamma_k^{g',g} + K_m^g \theta_{uk}^g (1 - \delta^{g',g}) \times \sum_{g' \leq g'' < g} \frac{T_{uk}(g'' \rightarrow g)}{\Sigma_{auk}^{g''}} r_{uk}^1(g' \rightarrow g'') \quad (\text{III.D.1.39})$$

$$c_k^1(g' \rightarrow g) = -\delta^{g',g} + (1 - \delta^{g',g}) \left(\frac{m(g',g) \pi_k(g' \rightarrow g)}{K_g^{g'}} + \theta_{uk}^g K_m^g \sum_{g' \leq g'' < g} \frac{T_{uk}(g'' \rightarrow g)}{\Sigma_{auk}^{g''}} t_{uk}^1(g' \rightarrow g'') \right) \quad (\text{III.D.1.40})$$

$$b_k^1(g' \rightarrow g) = \theta_{uk}^g K_m^g \sum_{g' \leq g'' \leq NG} \eta_k^{g''} r_{uk}^1(g' \rightarrow g'') \quad (\text{III.D.1.41})$$

$$d_k^1(g' \rightarrow g) = \theta_{uk}^g K_m^g \sum_{g' \leq g'' \leq NG} \eta_k^{g''} t_{uk}^1(g' \rightarrow g'') \quad (\text{III.D.1.42})$$

Les relations (III.D.1.20) et (III.D.1.38) correspondent aux relations (II.C.1.14) et (II.C.1.25) de la théorie monocinétique. Elles jouent le même rôle. En plus, ce sont les seules relations à traduire le couplage entre les groupes dans l'élaboration de la condition de criticité. Les autres relations (géométriques) sont monocinétiques.

D.2 - Relations géométriques entre les canaux

Compte tenu de (III.A.11) et (III.B.4) on peut écrire quel que soit g :

$$\psi_{ok}^{g,g}(\vec{r}_k) = \sum_{j \neq k} \left(N_j(g,g) K_0(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) + \vec{V}_j(g,g) \cdot \frac{(\vec{r}_k - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} K_1(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \right) \quad (III.D.2.1)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \psi_{ok}^{g,g}(\vec{r}_k) = & \sum_{j \neq k} \left(-N_j(g,g) K_m^g K_1(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \frac{(\vec{r}_k - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \right. \\ & \left. + \vec{V}_j(g,g) \frac{K_1(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} - \left(\vec{V}_j(g,g) \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j) \right) \frac{K_m^g K_2(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^2} (\vec{r}_k - \vec{r}_j) \right) \end{aligned}$$

Ces relations définissent le mode d'interaction des pôles et dipôles. (III.D.2.2)

D.3 - Condition de criticité du réacteur

On pose :

$$\vec{W}_k^g = \frac{\vec{\nabla} \psi_{ok}^{g,g}(\vec{r}_k)}{K_m^g} \quad (III.D.3.1)$$

Considérons un système d'axes rectangulaires Oxy dans un plan de section droite du réacteur. Nous noterons V_{kx}^g et W_{kx}^g (respectivement V_{ky}^g et W_{ky}^g) les projections des vecteurs $\vec{V}_k^g$ et $\vec{W}_k^g$ sur l'axe Ox (respectivement sur l'axe Oy).

Soient N^g et ϕ_0^g les vecteurs colonnes définis par :

$$N^g = \{ N_1(g,g), N_2(g,g), \dots, N_n(g,g), V_{1x}^g, V_{2x}^g, \dots, V_{nx}^g, V_{1y}^g, V_{2y}^g, \dots, V_{ny}^g \}$$

$$\phi_o^g = \{ \psi_{o1}^{g,g}(\vec{r}_1), \psi_{o2}^{g,g}(\vec{r}_2), \dots, \psi_{on}^{g,g}(\vec{r}_n), w_{1x}^g, w_{2x}^g, \dots, w_{nx}^g, w_{1y}^g, w_{2y}^g, \dots, w_{ny}^g \}$$

et N et ϕ_o les vecteurs colonnes, à $3n \times NG$ éléments, constitués en mettant bout à bout respectivement

$$\begin{array}{l} \text{les vecteurs } N^1, N^2, \dots, N^{NG} \\ \text{et les vecteurs } \phi_o^1, \phi_o^2, \dots, \phi_o^{NG} \end{array}$$

Le système des relations caractéristiques (III.D.1.20) et (III.D.1.38) écrites dans tous les groupes et pour tous les canaux, peut se condenser sous la forme :

$$A \phi_o + CN + \mu(B\phi_o + DN) = 0 \quad (\text{III.D.3.2})$$

où A , C , B et D sont des matrices carrées d'ordre $3n \times NG$ "partitionnées" en blocs de sous-matrices diagonales d'ordre $3n$.

Une telle matrice peut être représentée par le tableau suivant :

$$M = \begin{bmatrix} M^{1,1} & M^{1,2} & \dots & M^{1,g'} & \dots & M^{1,NG} \\ M^{2,1} & M^{2,2} & \dots & M^{2,g'} & \dots & M^{2,NG} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M^{g,1} & M^{g,2} & \dots & M^{g,g'} & \dots & M^{g,NG} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M^{NG,1} & M^{NG,2} & \dots & M^{NG,g'} & \dots & M^{NG,NG} \end{bmatrix} \quad (\text{III.D.3.3})$$

où les éléments $M^{g,g'}$ sont les sous-matrices diagonales d'ordre $3n$.

On a ⁽¹⁾ pour $1 \leq i \leq n$

$$\left\{ \begin{array}{lll} A_{i,i}^{g,g'} = a_i^0(g' \rightarrow g) & A_{i+n,i+n}^{g,g'} = K_m^{g'} a_i^1(g' \rightarrow g) & A_{i+2n,i+2n}^{g,g'} = K_m^{g'} a_i^1(g' \rightarrow g) \\ C_{i,i}^{g,g'} = c_i^0(g' \rightarrow g) & C_{i+n,i+n}^{g,g'} = c_i^1(g' \rightarrow g) & C_{i+2n,i+2n}^{g,g'} = c_i^1(g' \rightarrow g) \\ B_{i,i}^{g,g'} = \chi^g b_i^0(g' \rightarrow g) & B_{i+n,i+n}^{g,g'} = \chi^g K_m^{g'} b_i^1(g' \rightarrow g) & B_{i+2n,i+2n}^{g,g'} = \chi^g K_m^{g'} b_i^1(g' \rightarrow g) \\ D_{i,i}^{g,g'} = \chi^g d_i^0(g' \rightarrow g) & D_{i+n,i+n}^{g,g'} = \chi^g d_i^1(g' \rightarrow g) & D_{i+2n,i+2n}^{g,g'} = \chi^g d_i^1(g' \rightarrow g) \end{array} \right.$$

(III.D.3.4)

Les sous-matrices $A^{g',g}$, $C^{g',g}$, $B^{g',g}$ et $D^{g',g}$ correspondent respectivement aux matrices A, C, B et D de la théorie monocinétique.

Les matrices A et C, de la théorie multigroupe, sont triangulaires inférieures ⁽²⁾ car :

$$\left\{ \begin{array}{ll} A^{g',g} = 0 & \\ C^{g',g} = 0 & \end{array} \right. \quad \text{si } g' > g$$

D'un autre côté, le système des relations géométriques (III.D.2.1) et (III.D.2.2) s'écrit sous forme matricielle :

$$\phi_0 = GN \quad (III.D.3.5)$$

où G est une matrice carrée symétrique quasi-diagonale ⁽²⁾ d'ordre $3n \times NG$. La "diagonale" de G est constituée de NG sous-matrices carrées symétriques d'ordre $3n$ comparables à la matrice G de la théorie monocinétique.

⁽¹⁾ voir ⁽¹⁾ de la page 52.

⁽²⁾ cf. [19] 43.

Le $g^{\text{ième}}$ élément $G_{g,g}$ de cette diagonale est représenté par le tableau⁽¹⁾ :

$$G_{g,g} = \begin{bmatrix} \text{Pol}^{g,g}(1) & \text{Pol}^{g,g}(2) & \text{Pol}^{g,g}(3) \\ \text{Pol}^{g,g}(2)^T & \text{Pol}^{g,g}(4) & \text{Pol}^{g,g}(6) \\ \text{Pol}^{g,g}(3)^T & \text{Pol}^{g,g}(6) & \text{Pol}^{g,g}(5) \end{bmatrix} \quad (\text{III.D.3.6})$$

où $\text{Pol}^{g,g}(1)$, $\text{Pol}^{g,g}(4)$, $\text{Pol}^{g,g}(5)$ et $\text{Pol}^{g,g}(6)$ sont des matrices carrées d'ordre n symétriques ; $\text{Pol}^{g,g}(2)$ et $\text{Pol}^{g,g}(3)$ sont des matrices carrées d'ordre n antisymétriques. La diagonale de ces matrices est nulle et on a⁽²⁾ pour $i \neq j$:

$$\left\{ \begin{aligned} \text{Pol}_{i,j}^{g,g}(1) &= K_0(z_{ij}^g), \quad \text{Pol}_{i,j}^{g,g}(2) = \frac{x_i - x_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} K_1(z_{ij}^g), \quad \text{Pol}_{i,j}^{g,g}(3) = \frac{y_i - y_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} K_1(z_{ij}^g) \\ \text{Pol}_{i,j}^{g,g}(4) &= \frac{1}{K_m^g} \frac{K_1(z_{ij}^g)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} - (x_i - x_j)^2 \frac{K_2(z_{ij}^g)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} \\ \text{Pol}_{i,j}^{g,g}(5) &= \frac{1}{K_m^g} \frac{K_1(z_{ij}^g)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} - (y_i - y_j)^2 \frac{K_2(z_{ij}^g)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} \\ \text{Pol}_{i,j}^{g,g}(6) &= - (x_i - x_j)(y_i - y_j) \frac{K_2(z_{ij}^g)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} \end{aligned} \right.$$

(III.D.3.7)

avec $z_{ij}^g = K_m^g |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$.

⁽¹⁾ Le symbole T représente la transposition.

⁽²⁾ voir (1) de la page 52.

L'élimination de ϕ_0 entre (III.D.3.2) et (III.D.3.5) conduit à la relation :

$$(H + \mu K) N = 0 \quad (\text{III.D.3.8})$$

avec

$$\begin{aligned} H &= AG + C \\ K &= BG + D \end{aligned} \quad (\text{III.D.3.9})$$

La matrice K représente les productions tandis que H représente les captures. La présence de la matrice G dans leurs expressions, traduit simplement l'influence des fuites sur le spectre.

Pour que le réacteur soit critique, il est nécessaire que (III.D.3.8) soit vérifiée. C'est la condition de criticité du réacteur. Compte tenu de l'égalité $\mu = \frac{1}{k_{\text{eff}}}$, on pose $\lambda = \frac{1}{\mu}$. La condition de criticité, devient :

$$(\lambda H + K) N = 0 \quad (\text{III.D.3.10})$$

L'équation de criticité en théorie multigroupe revêt donc le même aspect qu'en théorie monocinétique. Tout ce qui a été dit au sujet de cette équation à la fin du chapitre II se transpose ici aisément. Elle est résolue dans le code FODITH.

CHAPITRE IV - CALCUL DU FLUX THERMIQUE CREE PAR UNE SOURCE
DE RALENTISSEMENT A GRADIENT CONSTANT DANS UN RESEAU INFINI PERIODIQUE -
RELATION ENTRE LE COEFFICIENT DE DIFFUSION RADIAL THERMIQUE ET LES
PARAMETRES HETEROGENES

Section A

GENERALITES

Le coefficient de diffusion d'un réseau périodique, dans la direction Ox, au niveau du groupe g, est donné par la formule :

$$D_{ox}^g = \frac{\int_{V_{cel}} (j_{1xx}^g + x \operatorname{div} j_{1x}^g) dV}{\int_{V_{cel}} \phi_0^g dV} \quad (IV.A.1)$$

dans laquelle :

- V_{cel} peut être assimilé au volume de la cellule du réseau compris entre deux sections droites distantes d'une unité de longueur ;
- x représente la projection sur Ox du rayon vecteur partant du centre de ce volume ;
- ϕ_0^g est l'intégrale sur l'angle solide (4π) du flux angulaire v_0^g solution propre, dans le réseau périodique prolongé jusqu'à l'infini, de l'équation⁽¹⁾ (cf. [11]) :

⁽¹⁾ On choisit la présentation en formulation statique de [11] et l'on adopte les notations et les conventions du chapitre I § 3 du présent mémoire.

$$\operatorname{div} \vec{\Omega} v_o^g + \Sigma_t^g v_o^g = \frac{\Sigma_s^g}{4\pi} \phi_o^g + \frac{1}{4\pi} \sum_{1 \leq g' < g} T(g' \rightarrow g) \phi_o^{g'} + \frac{\mu_o}{4\pi} \chi^g \sum_{1 \leq g' \leq NG} v_f^{g'} \Sigma_f^{g'} \phi_o^{g'} \quad (\text{IV.A.2})$$

avec $\mu_o = \frac{1}{k_\infty}$;

- j_{1x}^g désigne la composante x du courant $\vec{j}_{1x}^g$ défini par l'égalité :

$$\vec{j}_{1x}^g = \int_{(4\pi)} \vec{\Omega} v_{1x}^g d\Omega$$

où v_{1x}^g est solution, dans le réseau périodique prolongé jusqu'à l'infini, de l'équation⁽¹⁾ :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{\Omega} v_{1x}^g + \Sigma_t^g v_{1x}^g - \Omega_x v_o^g &= \frac{\Sigma_s^g}{4\pi} \phi_{1x}^g + \frac{1}{4\pi} \sum_{1 \leq g' < g} T(g' \rightarrow g) \phi_{1x}^{g'} \\ &+ \frac{\mu_o}{4\pi} \chi^g \sum_{1 \leq g' \leq NG} v_f^{g'} \Sigma_f^{g'} \phi_{1x}^{g'} \quad (\text{IV.A.3}) \end{aligned}$$

$$\text{avec } \phi_{1x}^g = \int_{(4\pi)} v_{1x}^g d\Omega.$$

On admettra qu'il est légitime de négliger le couplage intergroupes dans l'équation (IV.3.A). Cela revient à supposer que l'influence de la source $\Omega_x v_o^g$ est prépondérante.

Dans le groupe thermique la fraction incidente χ^g du spectre de fission est nulle ; les équations (IV.A.2) et (IV.A.3) se réduisent à⁽²⁾ :

(1) Voir⁽¹⁾ page précédente.

(2) On conviendra de supprimer l'indice de groupe pour désigner tout ce qui se rapporte au groupe thermique.

$$\text{div } \vec{\Omega} v_0 = - \Sigma_t v_0 + \frac{\Sigma_s \phi_0}{4\pi} + \frac{q}{4\pi} \delta_m \quad (\text{IV.A.4})$$

$$\text{div } \vec{\Omega} v_{1x} - \Omega_x v_0 = - \Sigma_t v_{1x} + \frac{\Sigma_s \phi_{1x}}{4\pi} \quad (\text{IV.A.5})$$

où q est l'intensité dans le modérateur de la source de ralentissement, relative au flux v_0 . On admettra comme en théorie ABH [10] que cette source est uniforme. La fonction δ_m est la fonction égale à l'unité dans le modérateur et nulle ailleurs. On suppose que le combustible ne ralentit pas les neutrons.

Si la source de v_0 avait pour intensité $\frac{q}{4\pi} \psi \delta_m$, au lieu de $\frac{q}{4\pi} \delta_m$, où ψ est une fonction à gradient constant $\vec{\nabla} \psi = \begin{cases} \nabla \psi_x \\ \nabla \psi_y \\ \nabla \psi_z \end{cases}$, il est facile de vérifier que v_0 se changerait en :

$$v = v_0 \psi - \sum_x v_{1x} \nabla \psi_x \quad (\text{IV.A.6})$$

La sommation est étendue à toutes les directions. Ainsi la résolution du système { (IV.A.4) et (IV.A.5) } se ramène à celle d'un problème à source.

L'expression (IV.A.6) s'apparente à la formule (A.12) obtenue par BENOIST dans sa thèse [12] par la théorie intégrale du transport : v_0 est le flux de structure fine d'ordre zéro et v_{1x} est le flux antisymétrique.

Section B

CALCUL DU FLUX ANTISYMETRIQUE, DONT DEPEND LA FORMULE DU COEFFICIENT DE DIFFUSION RADIAL THERMIQUE, EN THEORIE HETEROGENE

On se ramène au problème à source, monocinétique, associé.

Une source est répartie linéairement dans le modérateur d'un réseau périodique infini. Soit $\frac{q\psi}{4\pi} \delta_m$ l'intensité de cette source, où q est une constante ayant les dimensions d'une source et ψ une fonction à gradient constant. On se propose de chercher l'expression du flux créé par cette source en théorie hétérogène.

On supposera que chaque canal du réseau se compose d'un barreau plein de combustible de rayon a non fissile entouré d'une cavité de rayon c . On supposera également que $\vec{\nabla}\psi$ est orthogonal à l'axe de tous les canaux⁽¹⁾.

Le flux angulaire v créé par cette source obéit aux équations suivantes (le flux scalaire associé étant ϕ) :

1. dans le modérateur du réseau :

$$\text{div } \vec{\Omega} v + \Sigma_{tm} v = \frac{\Sigma_{sm} \phi}{4\pi} + \frac{q}{4\pi} \psi \quad (\text{IV.B.1})$$

2. dans la cavité contenue dans chaque canal :

$$\text{div } \vec{\Omega} v = 0 \quad (\text{IV.B.2})$$

3. dans le barreau contenu dans chaque canal :

$$\text{div } \vec{\Omega} v + \Sigma_{tu} v = \frac{\Sigma_{su} \phi}{4\pi} \quad (\text{IV.B.3})$$

⁽¹⁾ On ne s'intéresse en effet ici qu'au calcul du coefficient de diffusion radial.

On pose :

$$v = \frac{q}{4\pi \Sigma_{am}} \psi - \frac{\lambda_m q}{4\pi \Sigma_{am}} \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\Omega} + n \quad (\text{IV.B.4})$$

avec

$$\Sigma_a = \Sigma_t - \Sigma_s$$

$$\lambda = \frac{1}{\Sigma_t}$$

Il est facile de vérifier que n est un flux angulaire obéissant aux équations⁽¹⁾ :

1. dans le modérateur du réseau :

$$\text{div } \vec{\Omega} n + \Sigma_{tm} n = \frac{\Sigma_{sm} N}{4\pi} \quad (\text{IV.B.5})$$

2. dans la cavité de chaque canal :

$$\text{div } \vec{\Omega} n = - \frac{q}{4\pi \Sigma_{am}} \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\Omega} \quad (\text{IV.B.6})$$

3. dans le barreau de chaque canal

$$\text{div } \vec{\Omega} n + \Sigma_{tu} n = \frac{\Sigma_{su} N}{4\pi} - \frac{\Sigma_{au}}{4\pi \Sigma_{am}} q \psi - \frac{q}{4\pi \Sigma_{am}} \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u}\right) \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\Omega}$$

$$\text{avec } N = \int_{(4\pi)} n \, d\Omega. \quad (\text{IV.B.7})$$

(1) Nota :

Il n'y a pas, à proprement parler, de conditions aux limites pour n à l'infini : n doit simplement satisfaire aux équations (IV.B.5), (IV.B.6) et (IV.B.7) jusqu'à l'infini.

Le changement de fonction (IV.B.4) a eu pour effet de rejeter les sources du modérateur dans le canal. Les équations de n sont très analogues à celles qui régissent le flux dans un réacteur, en théorie monocinétique. On peut donc appliquer le théorème de séparation. On écrit :

$$n = \sum_k n_k \quad (\text{IV.B.8})$$

où n_k est le flux angulaire solution, dans la géométrie k (constituée du canal k entouré par du modérateur jusqu'à l'infini), des équations :

1. dans le modérateur (emplacement des autres canaux compris)

$$\text{div } \vec{\Omega} n_k + \Sigma_{tm} n_k = \frac{\Sigma_{sm} N_k}{4\pi} \quad (\text{IV.B.9})$$

2. dans la cavité contenue dans le canal k

$$\text{div } \vec{\Omega} n_k = - \frac{q}{4\pi \Sigma_{am}} \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\Omega} + \Sigma_{tm} n_{ok} - \frac{\Sigma_{sm} N_{ok}}{4\pi} \quad (\text{IV.B.10})$$

3. dans le barreau contenu dans le canal k

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{\Omega} n_k + \Sigma_{tu} n_k &= \frac{\Sigma_{su} N_k}{4\pi} - \frac{\Sigma_{au}}{4\pi \Sigma_{am}} q \psi \\ &- \frac{q}{4\pi \Sigma_{am}} \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u}\right) \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\Omega} + (\Sigma_{tm} - \Sigma_{tu}) n_{ok} - \frac{(\Sigma_{sm} - \Sigma_{suk})}{4\pi} N_{ok} \end{aligned} \quad (\text{IV.B.11})$$

avec

$$N_k = \int_{(4\pi)} n_k d\Omega \quad (\text{IV.B.12})$$

$$n_{ok} = \sum_{j \neq k} n_j \quad (\text{IV.B.13}) \quad \text{et} \quad N_{ok} = \sum_{j \neq k} N_j \quad (\text{IV.B.14})$$

Compte tenu de ces conventions, l'intégration sur l'angle solide (4π) de (IV.B.8) donne :

$$N = \sum_k N_k \quad (\text{IV.B.15})$$

Le développement en série de Taylor de la fonction ψ dans le barreau du canal k donne :

$$\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}_k) + (\vec{r} - \vec{r}_k) \cdot \vec{\nabla}\psi \quad (\text{IV.B.16})$$

où $\vec{r}_k$ désigne le centre du canal k dans la section droite de la géométrie k , contenant le point $\vec{r}$.

Les sources n_k ne diffèrent de celles du flux partiel monocinétique v_k (cf. équations (II.A.2), (II.A.3) et (II.A.20)) que par la présence de termes en $\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\psi$.

Pour tenir compte de ces nouveaux termes, on introduira deux paramètres hétérogènes dipolaires supplémentaires β_u et β_c .

Soient :

- K_m l'inverse de la longueur de diffusion dans le modérateur ;
- Ω_x la projection de $\vec{\Omega}$ sur un axe Ox orthogonal à l'axe du canal ;
- α l'angle qui amène le rayon vecteur $\vec{r} - \vec{r}_k$ sur Ox ;
- ρ le module de ce rayon vecteur.

Le paramètre β_u est le coefficient par lequel il faut multiplier $K_m K_1(K_m \rho) \cos \alpha$ pour obtenir l'expression asymptotique, dans le modérateur de la géométrie k , du flux créé par la source d'intensité $\frac{\Omega_x}{4\pi}$ localisée au barreau.

Le paramètre β_c joue le même rôle pour une source d'intensité $\frac{\Omega_x}{4\pi}$ localisée à la cavité.

Dans ces conditions, compte tenu des conventions adoptées au chapitre II section B, le flux N_k a pour expression asymptotique dans le modérateur de la géométrie k :

$$N_{kas}(\vec{r}) = \left(\tilde{\gamma} N_{ok}(\vec{r}_k) - \gamma_u \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q \psi(\vec{r}_k) \right) K_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \\ - K_m \left(\tilde{\beta} \vec{\nabla} N_{ok}(\vec{r}_k) + \beta_o \frac{q}{\Sigma_{am}} \vec{\nabla} \psi \right) \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} K_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \quad (IV.B.17)$$

On a posé :

$$\beta_o = \beta_u \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) + \beta_c + \theta_u \Sigma_{au} \quad (IV.B.18)$$

On montre, en annexe H, que :

$$\beta_o = - \frac{\Sigma_{au} \lambda_u}{a} \frac{P^+}{P^+ - \bar{u}} \theta_u \quad (IV.B.19)$$

Lorsque Σ_{am} tend vers zéro, $\tilde{\beta}$ et β_o (cf fin de l'annexe H) tendent vers la même valeur. Cette circonstance n'est pas fortuite. La première expression que nous avons proposée pour le paramètre hétérogène dipolaire $\tilde{\beta}$ était précisément β_o (cf [21]). Nous supposons alors que Σ_{am} était très faible.

En admettant, à nouveau, l'hypothèse de la page 10, compte tenu de (IV.B.14), on a, au centre du canal k :

$$\begin{aligned}
 N_{ok}(\vec{r}_k) = & \sum_{j \neq k} \left(\gamma N_{oj}(\vec{r}_j) - \gamma_u \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q \psi(\vec{r}_j) \right) K_0(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \\
 & - \sum_{j \neq k} K_m \left(\gamma \vec{\nabla} N_{oj}(\vec{r}_j) + \beta_o \frac{q}{\Sigma_{am}} \vec{\nabla} \psi \right) \cdot \frac{(\vec{r}_k - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} K_1(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)
 \end{aligned}
 \tag{IV.B.20}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} N_{ok}(\vec{r}_k) = & \sum_{j \neq k} - K_m \left(\gamma N_{oj}(\vec{r}_j) - \gamma_u \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q \psi(\vec{r}_j) \right) K_1(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \frac{(\vec{r}_k - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \\
 & - \sum_{j \neq k} K_m \left(\gamma \vec{\nabla} N_{oj}(\vec{r}_j) + \beta_o \frac{q}{\Sigma_{am}} \vec{\nabla} \psi \right) \frac{K_1(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \\
 & + \sum_{j \neq k} (K_m)^2 \left(\left(\gamma \vec{\nabla} N_{oj}(\vec{r}_j) + \beta_o \frac{q}{\Sigma_{am}} \vec{\nabla} \psi \right) \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j) \right) \frac{K_2(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^2} (\vec{r}_k - \vec{r}_j)
 \end{aligned}
 \tag{IV.B.21}$$

L'ensemble des relations, qu'on obtient en écrivant (IV.B.20) et (IV.B.21) en tous les centres de canaux du réseau, constituent vis-à-vis des inconnues $\{N_{ok}(\vec{r}_k) \text{ et } \vec{\nabla} N_{ok}(\vec{r}_k), k = 1, 2, \dots, \infty\}$ un système d'équations linéaires avec second membre. Ce système admet une solution unique. En effet, si on pouvait en trouver deux solutions, leur différence serait une solution du système sans second membre. Cette dernière est manifestement nulle car elle correspond au calcul du flux dans un réseau sans source et sans fission.

La solution du système $\{(IV.B.20, IV.B.21)\}$ nous est suggérée par la périodicité du réseau et la structure linéaire de ses sources. Les quantités $N_{ok}(\vec{r}_k)$ peuvent être considérées comme la représentation discrète, aux points $\vec{r}_k$, d'une fonction N_o à gradient constant $\vec{\nabla} N_o$ et $\vec{\nabla} N_{ok}(\vec{r}_k)$ peut être remplacé par un vecteur constant $\vec{\nabla} N_1$. Cela donne si le réseau est carré, ce que nous supposons pour la suite des calculs de cette section :

$$N_o(\vec{r}_k) = \left(\tilde{\gamma} N_{ok}(\vec{r}_k) - \gamma_u \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q \psi(\vec{r}_k) \right) S_o \quad (\text{IV.B.22})$$

$$\vec{\nabla} N_1 = (\tilde{\gamma} \vec{\nabla} N_o - \gamma_u \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q \vec{\nabla} \psi) S_{o1} + (\tilde{\beta} \vec{\nabla} N_1 + \beta_o \frac{q}{\Sigma_{am}} \vec{\nabla} \psi) (S_2 - S_1) \quad (\text{IV.B.23})$$

On a développé $N_o(\vec{r}_j)$ en série de Taylor à partir du point $\vec{r}_k$:

$$N_o(\vec{r}_j) = N_o(\vec{r}_k) + (\vec{r}_j - \vec{r}_k) \cdot \vec{\nabla} N_o$$

On a projeté (IV.B.21) sur des axes Ox et Oy parallèles aux directions de symétrie d'une section droite du réseau.

On s'est servi des relations suivantes, dues à l'égalité des propriétés du réseau carré suivant ces axes :

$$\sum_{j \neq k} K_o(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) (\vec{r}_k - \vec{r}_j) = 0 \quad (\text{IV.B.24})$$

$$\sum_{j \neq k} \frac{K_1(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} (\vec{r}_k - \vec{r}_j) = 0 \quad (\text{IV.B.25})$$

$$\sum_{j \neq k} (x_k - x_j)(y_k - y_j) \frac{K_1(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} = 0 \quad (\text{IV.B.26})$$

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq k} (x_k - x_j)^2 \frac{K_1(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} &= \sum_{j \neq k} (y_k - y_j)^2 \frac{K_1(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} |\vec{r}_k - \vec{r}_j| K_1(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \end{aligned}$$

$$\sum_{j \neq k} (x_k - x_j)(y_k - y_j) \frac{K_2(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^2} = 0 \quad (\text{IV.B.27})$$

$$\sum_{j \neq k} (x_k - x_j)^2 \frac{K_2(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^2} = \sum_{j \neq k} (y_k - y_j)^2 \frac{K_2(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} K_2(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)$$

On a posé :

$$S_{01} = \frac{1}{2} K_m \sum_{j \neq k} K_1(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) |\vec{r}_k - \vec{r}_j| \quad (\text{IV.B.28})$$

Les quantités S_0 , S_1 et S_2 ont été définies au chapitre II, section B.

On a :

$$S_2 - S_1 = \frac{K_m^2}{2} S_0 \quad (\text{voir page 33})$$

De (IV.B.22), on tire immédiatement :

$$N_0(\vec{r}_k) = - \frac{\gamma_u \Sigma_{au} S_0}{1 - \tilde{\gamma} S_0} \frac{q}{\Sigma_{am}} \psi(\vec{r}_k) \quad (\text{IV.B.29})$$

On en déduit que :

$$\vec{\nabla} N_0 = - \frac{\gamma_u \Sigma_{au} S_0}{1 - \tilde{\gamma} S_0} \frac{q}{\Sigma_{am}} \vec{\nabla} \psi \quad (\text{IV.B.30})$$

Compte tenu de cette égalité, (IV.B.23) donne⁽¹⁾ :

$$\vec{\nabla} N_1 = \frac{\beta_0 \frac{K_m^2}{2} S_0 - \frac{\gamma_u \Sigma_{au} S_{01}}{1 - \gamma S_0}}{1 - \beta \frac{K_m^2}{2} S_0} \frac{q}{\Sigma_{am}} \vec{\nabla} \psi \quad (\text{IV.B.31})$$

La quantité S_{01} peut se calculer à partir de l'expression analytique de S_0 . On a, en effet :

$$S_{01} = -\frac{1}{2} K_m \frac{\partial}{\partial K_m} S_0 \quad (\text{IV.B.32})$$

Si l'on se contente de la formule approximative (démontrée au chapitre II) :

$$S_0 = \frac{K_1(K_m b)}{I_1(K_m b)}$$

(1)

Si le réseau n'était pas carré, les relations (IV.B.24), (IV.B.25), (IV.B.26) et (IV.B.27) seraient encore valables. On démontre, en effet, que tout réseau infini périodique est la superposition de réseaux rectangulaires. L'égalité (IV.B.22) serait conservée. Il en irait évidemment de même pour (IV.B.29) et (IV.B.30) qui se déduisent de (IV.B.22). Par contre, les propriétés d'un réseau rectangulaire n'étant pas identiques dans ses directions de symétrie, (IV.B.23) se changerait en une relation matricielle "diagonale" d'ordre deux ; il en serait de même de (IV.B.31). Le rapport des deux coefficients de la diagonale de la matrice faisant passer de $\vec{\nabla} \psi$ à $\vec{\nabla} N_1$ traduirait "l'anisotropie" du réseau.

où b est le rayon de la cellule, il vient immédiatement⁽¹⁾ :

$$S_{01} = \frac{1}{2} \frac{1}{(I_1(K_m b))^2} \quad (\text{IV.B.33})$$

On peut montrer que cette formule est valable à un terme d'ordre $K_m^2 \ln K_m$ près (voir, en Annexe S, la somme S_{2x2}^g).

En remplaçant, dans (IV.B.17), $N_{ok}(\vec{r}_k)$ et $\vec{\nabla} N_{ok}(\vec{r}_k)$ par leurs valeurs respectivement tirées de (IV.B.29) et (IV.B.31), on obtient :

$$N_{kas}(\vec{r}) = - \frac{\gamma_u \frac{\sum_{au}}{\sum_{am}} q \psi(\vec{r}_k)}{1 - \tilde{\gamma} S_o} K_o(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|)$$

$$- K_m \left[\frac{\beta_o - \frac{\gamma_u \sum_{au} S_{o1}}{1 - \tilde{\gamma} S_o} \tilde{\beta}}{1 - \tilde{\beta} \frac{K_m^2}{2} S_o} \right] \frac{q}{\sum_{am}} \vec{\nabla} \psi \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} K_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|)$$

(IV.B.34)

En vertu de (IV.B.15), N a donc pour expression asymptotique dans le modérateur du réseau :

(1)

$$\frac{\partial}{\partial K_m} \left(\frac{K_1(K_m b)}{I_1(K_m b)} \right) = b \frac{\left[-\frac{K_1(K_m b)}{K_m b} - K_o(K_m b) \right] I_1(K_m b) - \left[-\frac{I_1(K_m b)}{K_m b} + I_o(K_m b) \right] K_1(K_m b)}{(I_1(K_m b))^2}$$

$$= -b \frac{K_o(K_m b) I_1(K_m b) + I_o(K_m b) K_1(K_m b)}{(I_1(K_m b))^2} = -\frac{1}{K_m (I_1(K_m b))^2}$$

$$N_{as}(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) \sum_k \frac{-\gamma_u \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q}{1 - \tilde{\gamma} S_o} K_o(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) + \vec{\nabla} \psi \cdot \sum_k \left[\frac{\gamma_u \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q}{1 - \tilde{\gamma} S_o} K_o(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) (\vec{r} - \vec{r}_k) \right. \\ \left. - K_m \left(\frac{\beta_o - \frac{\gamma_u \Sigma_{au} S_{o1}}{1 - \tilde{\gamma} S_o} \beta}{1 - \tilde{\gamma} \frac{K_m^2}{2} S_o} \right) \frac{q}{\Sigma_{am}} K_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \frac{(\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \right] \quad (IV.B.35)$$

On a remplacé $\psi(\vec{r}_k)$ par son développement :

$$\psi(\vec{r}_k) = \psi(\vec{r}) + (\vec{r}_k - \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \psi$$

On intègre (IV.B.4) sur l'angle solide (4π). Il vient :

$$\phi = \frac{q}{\Sigma_{am}} \psi + N \quad (IV.B.36)$$

De (IV.B.35) et (IV.B.36), il résulte que ϕ a une partie asymptotique dans le modérateur du réseau et qu'elle s'écrit :

$$\phi_{as}(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) \left[\frac{q}{\Sigma_{am}} - \sum_k \frac{\gamma_u \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q}{1 - \tilde{\gamma} S_o} K_o(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \right] + \left[\sum_k \left[\frac{\gamma_u \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q}{1 - \tilde{\gamma} S_o} K_o(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) (\vec{r} - \vec{r}_k) \right. \right. \\ \left. \left. - K_m \left(\frac{\beta_o - \frac{\gamma_u \Sigma_{au} S_{o1}}{1 - \tilde{\gamma} S_o} \beta}{1 - \tilde{\gamma} \frac{K_m^2}{2} S_o} \right) \frac{q}{\Sigma_{am}} K_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \frac{(\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \right] \right] \cdot \vec{\nabla} \psi \quad (IV.B.37)$$

En comparant cette expression à (IV.A.6), on voit immédiatement que ϕ_o et ϕ_{1x} ont pour expressions asymptotiques dans le même modérateur :

$$\phi_{0as}(\vec{r}) = \frac{q}{\Sigma_{am}} - \sum_k \frac{\gamma_u \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q}{1 - \tilde{\gamma} S_0} K_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \quad (IV.B.38)$$

$$\begin{aligned} \phi_{1x_{as}}(\vec{r}) = & - \left[\sum_k \frac{\gamma_u \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q}{1 - \tilde{\gamma} S_0} K_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) (\vec{r} - \vec{r}_k) \right. \\ & \left. - \sum_k K_m \left(\frac{\beta_0 - \frac{\gamma_u \Sigma_{au} S_{01} \tilde{\beta}}{1 - \tilde{\gamma} S_0}}{1 - \tilde{\beta} \frac{K_m^2}{2} S_0} \right) \frac{q}{\Sigma_{am}} K_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \right] \cdot \vec{w} \end{aligned} \quad (IV.B.39)$$

où $\vec{w}$ désigne le vecteur unitaire de l'axe Ox.

Remarques :

1. L'expression (IV.B.38) de ϕ_{0as} aurait pu être obtenue directement à partir de (IV.A.4) (sans passer par la résolution du problème associé). Il suffit de poser :

$$v_0 = \frac{q}{4\pi \Sigma_{am}} + n_0$$

On est alors ramené au calcul du flux qui a conduit à l'expression analytique de $\tilde{\gamma}$ (voir chapitre II § B.2 b).

2. Il est facile de vérifier que $\phi_{1x_{as}}$ s'annule sur les frontières de la cellule qui sont orthogonales à l'axe des x.

Compte tenu de l'égalité $\vec{r} - \vec{r}_j = \vec{r} - \vec{r}_k + \vec{r}_k - \vec{r}_j$, il vient :

$$\sum_k K_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) (\vec{r} - \vec{r}_k) = (\vec{r} - \vec{r}_k) \sum_j K_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_j|) + \sum_{j \neq k} K_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_j|) (\vec{r}_k - \vec{r}_j) \quad (IV.B.40)$$

L'utilisation des formules d'addition de NEUMANN, relatives aux fonctions de BESSEL, nous a permis de montrer, au chapitre II § B.2 b et B.3 c, que dans la cellule centrée sur $\vec{r}_k$, on a d'une part :

$$\sum_j K_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_j|) = K_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) + S_0 I_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \quad (\text{IV.B.41})$$

aux harmoniques d'ordre $4p$ près, p étant un nombre entier positif, d'autre part :

$$\sum_j \frac{K_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_j|)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} (\vec{r} - \vec{r}_j) \cdot \vec{W} = (K_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) - S_0 I_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|)) \frac{(\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \cdot \vec{W} \quad (\text{IV.B.42})$$

aux harmoniques d'ordre $4p \pm 1$ près.

On aurait également pu montrer, en utilisant les formules de NEUMANN, que dans la cellule centrée sur $\vec{r}_k$, on peut écrire :

$$\sum_{j \neq k} K_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_j|) (\vec{r}_k - \vec{r}_j) = -\frac{2}{K_m} I_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) S_{01} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \quad (\text{IV.B.43})$$

aux harmoniques d'ordre $4p + 1$ près.

Dans le modérateur de la cellule centrée sur $\vec{r}_k$, $\phi_{1x_{as}}$ admet donc pour fondamental ⁽¹⁾ (ρ et α ont été définis à la page 100) :

(1) Si le réseau n'était pas carré, compte tenu des remarques précédentes, le fondamental de $\phi_{1x_{as}}$ s'écrirait :

$$\phi_{1x_{as}}(\vec{r}) = -\frac{\gamma_u \frac{\epsilon_{au}}{\epsilon_{am}} q}{1 - \tilde{\gamma} S_0} \left[(K_0(K_m \rho) + S_0 I_0(K_m \rho)) \rho - \frac{2}{K_m} I_1(K_m \rho) S_{01x} \right] \cos \alpha$$

$$+ K_m \left(\frac{\beta_0 - \frac{\gamma_u \epsilon_{au} S_{01x} \tilde{\gamma}}{1 - \tilde{\gamma} S_0}}{1 - \tilde{\beta} (S_{2x} - S_1)} \right) \frac{q}{\epsilon_{am}} (K_1(K_m \rho) - S_0 I_1(K_m \rho)) \cos \alpha$$

avec $S_{01x} = K_m \sum_{j \neq k} (x_k - x_j)^2 \frac{K_1(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|}$ et $S_{2x} = K_m^2 \sum_{j \neq k} (x_k - x_j)^2 \frac{K_2(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^2}$

$$\begin{aligned} \phi_{1x_{as}}(\vec{r}) = & - \frac{\gamma_u \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q}{(1 - \tilde{\gamma} S_o) I_1(K_m b)} \left(\rho \Delta_o(K_m \rho) - \frac{I_1(K_m \rho)}{K_m I_1(K_m b)} \right) \cos \alpha \\ & + K_m \left(\frac{\beta_o - \frac{\gamma_u \Sigma_{au} S_{o1}}{1 - \tilde{\gamma} S_o} \tilde{\beta}}{(1 - \tilde{\beta} \frac{K_m^2}{2} S_o) I_1(K_m b)} \right) \frac{q}{\Sigma_{am}} \Delta_1(K_m \rho) \cos \alpha \quad (\text{IV.B.44}) \end{aligned}$$

On a repris les notations du chapitre II § B.2 b et B.3 c. On a remplacé, dans les quantités dépendant de l'espace, S_o et S_{o1} par leurs valeurs approximatives respectives

$$\frac{K_1(K_m b)}{I_1(K_m b)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2(I_1(K_m b))^2},$$

obtenues en cylindrisant la cellule.

L'expression (IV.B.44) représente donc $\phi_{1x_{as}}$ lorsque la cellule est cylindrisée. On peut remarquer d'ailleurs qu'elle s'annule pour $\rho = b$. Cependant l'expression de $\phi_{1x_{as}}$, obtenue par BENOIST par un calcul de cellule, en (I.10) de [12], ne comporte qu'un terme⁽¹⁾ proportionnel à $K_m \Delta_1(K_m \rho) \cos \alpha$. La présence de deux termes distincts dans (IV.B.44) résulte de ce que nous n'avons pas remplacé, comme l'a fait BENOIST, le flux angulaire v_o par sa valeur moyenne, sur l'angle solide (4π) et sur le volume, dans chacun des milieux de la cellule. Cet artifice de calcul ne perd son caractère approximatif que lorsque v_o est effectivement isotrope et uniforme. Cette circonstance ne peut se produire que si $\Sigma_{au} = 0$ (voir l'équation (IV.A.4)).

On vérifie que, si $\Sigma_{au} = 0$, le terme, dans (IV.B.44), qui n'est pas proportionnel à $K_m \Delta_1(K_m \rho) \cos \alpha$, disparaît. D'ailleurs, si l'on fait un calcul de cellule, sans supposer v_o isotrope et uniforme dans chacun des milieux, on retrouve pour $\phi_{1x_{as}}$ l'expression (IV.B.44). C'est ce que nous montrerons dans la prochaine section.

(1)

Lorsque K_m est très petit $\Delta_1(K_m \rho)$ se réduit à $\frac{b}{2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{b^2} \right)$.

Section C

CALCUL DU FLUX ANTISYMETRIQUE DONT DEPEND LA FORMULE DU COEFFICIENT DE DIFFUSION RADIAL THERMIQUE AU MOYEN DU FORMALISME DE CALCUL DE CELLULE

On ne fait plus appel au problème à source associé.

On résout parallèlement les équations (IV.A.4) et (IV.A.5) dans la cellule, cylindrisée, d'un réseau périodique de dimensions infinies (en hauteur et en rayon). Le canal est toujours supposé composé de deux milieux : un barreau combustible entouré d'une cavité⁽¹⁾.

On pose :

$$v_o = \frac{q}{4\pi \Sigma_{am}} + n_o \quad (IV.C.1)$$

Le flux angulaire n_o obéit aux équations :

1 - dans le modérateur de la cellule :

$$\text{div } \vec{\Omega} n_o + \Sigma_{tm} n_o = \frac{\Sigma_{sm} N_o}{4\pi} \quad (IV.C.2)$$

2 - dans la cavité contenue dans le canal :

$$\text{div } \vec{\Omega} n_o = 0 \quad (IV.C.3)$$

3 - dans le barreau contenu dans le canal :

$$\text{div } \vec{\Omega} n_o + \Sigma_{tu} n_o = \frac{\Sigma_{su} N_o}{4\pi} - \frac{\Sigma_{au}}{4\pi \Sigma_{am}} q \quad (IV.C.4)$$

⁽¹⁾ sauf mention particulière, les notations adoptées ici seront celles des sections précédentes.

avec

$$N_o = \int_{(4\pi)} n_o d\Omega$$

Le changement de fonction (IV.C.1) a eu pour effet de remplacer les sources réparties dans le modérateur par des sources ^{réparties} dans le barreau. Si l'on se souvient du calcul de $\tilde{\gamma}$, exposé au paragraphe B.2.b du chapitre II, l'expression asymptotique de N_o dans le modérateur de la cellule s'écrit immédiatement :

$$N_{o_{as}}(\vec{\rho}) = -\gamma_{ub} \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q \Delta_o(K_m \rho) \quad (IV.C.5)$$

où ρ est le module du rayon vecteur $\vec{\rho}$ qui part du centre du canal dans un plan de section droite de la cellule.

On a (cf (II.B.2.18)) :

$$\gamma_{ub} = \frac{\gamma_u}{(1 - \tilde{\gamma} S_o) I_1(K_m b)} \quad (IV.C.6)$$

Compte tenu de (IV.C.1) et de la linéarité de l'équation du transport, on peut écrire :

$$v_{1x} = n_{1x} + n_{2x} \quad (IV.C.7)$$

où n_{1x} est le flux angulaire créé par la source d'intensité $\frac{q}{4\pi \Sigma_{am}} \Omega_x$

et n_{2x} le flux angulaire créé par la source d'intensité $\Omega_x n_o$.

On pose :

$$n_{1x} = \frac{\lambda_m}{4\pi \Sigma_{am}} q \Omega_x + \zeta_{1x} \quad (IV.C.8)$$

Le flux angulaire ζ_{1x} obéit aux équations suivantes (ψ_{1x} étant le flux scalaire associé) :

1 - dans le modérateur de la cellule :

$$\operatorname{div} \vec{\Omega} \zeta_{1x} + \Sigma_{tm} \zeta_{1x} = \frac{\Sigma_{sm} \psi_{1x}}{4\pi} \quad (\text{IV.C.9})$$

2 - dans la cavité :

$$\operatorname{div} \vec{\Omega} \zeta_{1x} = \frac{q}{4\pi \Sigma_{am}} \Omega_x \quad (\text{IV.C.10})$$

3 - dans le barreau :

$$\operatorname{div} \vec{\Omega} \zeta_{1x} + \Sigma_{tu} \zeta_{1x} = \frac{\Sigma_{su} \psi_{1x}}{4\pi} + \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u}\right) \frac{q}{4\pi \Sigma_{am}} \Omega_x \quad (\text{IV.C.11})$$

Par le changement de fonction (IV.C.8), les sources réparties dans le modérateur ont été rejetées dans le barreau. On en conclut que ψ_{1x} se compose, dans le modérateur de la cellule, d'une partie asymptotique et d'une perturbation de transport localisée à la frontière du canal (voir [14]). Cette partie asymptotique a pour expression⁽¹⁾ :

$$\psi_{1xas}(\vec{\rho}) = \left[\beta_{cb} + \beta_{ub} \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u}\right) \right] \frac{q}{\Sigma_{am}} K_m \Delta_1(K_m \rho) \cos \alpha \quad (\text{IV.C.12})$$

dans laquelle α est l'angle qui amène $\vec{\rho}$ sur Ox.

⁽¹⁾ Compte tenu de l'antisymétrie des sources de ζ_{1x} par rapport au centre de la cellule, ψ_{1x} doit s'annuler à la frontière extérieure de la cellule.

Les coefficients β_{ub} et β_{cb} sont la généralisation, à la cellule de rayon fini, des paramètres β_u et β_c définis dans la section précédente pour une cellule de rayon infini.

On montrerait facilement, en reprenant le calcul de $\tilde{\beta}$, exposé au chapitre II § B.3c, avec une source, localisée au barreau, d'intensité $\frac{\Omega_x}{4\pi}$ au lieu de $\frac{x}{4\pi}$, que (cf (II.B.3.27)) :

$$\beta_{ub} = \frac{\beta_u}{(1 - \gamma \frac{K_m^2}{2} S_o) I_1(K_m b)} \quad (\text{IV.C.13})$$

On montrerait de même, en localisant la source d'intensité $\frac{\Omega_x}{4\pi}$ à la cavité, que :

$$\beta_{cb} = \frac{\beta_c}{(1 - \gamma \frac{K_m^2}{2} S_o) I_1(K_m b)} \quad (\text{IV.C.14})$$

Le flux angulaire n_{2x} (N_{2x} étant le flux scalaire associé) obéit aux équations suivantes :

1 - dans le modérateur de la cellule :

$$\text{div } \vec{\Omega} n_{2x} + \Sigma_{tm} n_{2x} = \frac{\Sigma_{sm} N_{2x}}{4\pi} + \Omega_x n_o$$

2 - dans la cavité :

$$\text{div } \vec{\Omega} n_{2x} = \Omega_x n_o$$

3 - dans le barreau :

$$\text{div } \vec{\Omega} n_{2x} + \Sigma_{tu} n_{2x} = \frac{\Sigma_{su} N_{2x}}{4\pi} + \Omega_x n_o$$

Pour éliminer les sources en $\Omega_x n_0$, on pose :

$$n_{2x} = x n_0 + \zeta_{2x} \quad (\text{IV.C.15})$$

Compte tenu des relations (IV.C.2), (IV.C.3) et (IV.C.4) vérifiées par n_0 respectivement dans le modérateur, la cavité et le barreau, et compte tenu de l'égalité :

$$\text{div } x \vec{\Omega} n_0 = x \text{ div } \vec{\Omega} n_0 + \Omega_x n_0,$$

ζ_{2x} est solution des équations suivantes (ψ_{2x} étant le flux scalaire associé) :

1 - dans le modérateur :

$$\text{div } \vec{\Omega} \zeta_{2x} + \Sigma_{tm} \zeta_{2x} = \frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} \psi_{2x} \quad (\text{IV.C.16})$$

2 - dans la cavité :

$$\text{div } \vec{\Omega} \zeta_{2x} = 0 \quad (\text{IV.C.17})$$

3 - dans le barreau :

$$\text{div } \vec{\Omega} \zeta_{2x} + \Sigma_{tu} \zeta_{2x} = \frac{\Sigma_{su}}{4\pi} \psi_{2x} + \frac{\Sigma_{au}}{4\pi \Sigma_{am}} q_x \quad (\text{IV.C.18})$$

En effet, les opérateurs d'absorption totale et de diffusion n'agissent pas sur la variable d'espace.

Les sources de ζ_{2x} sont nulles dans le modérateur. On pourrait penser que ψ_{2x} possède, dans ce milieu, une partie asymptotique analogue à celle de ψ_{1x} . Ce serait oublier que ζ_{2x} doit obéir à la frontière de la cellule à

des conditions aux limites différentes de celles de ζ_{1x} . En effet, N_{2x} s'annule à cette frontière par antisymétrie de ses sources $\Omega_x n_0$ par rapport au centre du canal, mais $x N_0$ ne s'y annule pas. Le flux ψ_{2x} ne peut donc pas non plus s'y annuler. (voir IV.C.15).

On peut se tirer de ce mauvais pas en extrayant de ζ_{2x} un flux angulaire qui obéit à l'équation du transport sans source dans le modérateur et dont le flux scalaire prend à la frontière de la cellule la valeur $-x N_0$. Il est facile de voir que le flux angulaire

$$i_1(\vec{\rho}, \vec{\Omega}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} \int_{(2\pi)} du \frac{e^{-K_m \vec{u} \cdot \vec{\rho}}}{\Sigma_{tm} - K_m \vec{u} \cdot \vec{\Omega}} u_x \frac{N_0(b)}{I_1(K_m b)} b, \quad (IV.C.19)$$

où u_x est la composante x du vecteur unitaire $\vec{u}$ pouvant prendre toutes les directions dans le plan, répond à la question.

En effet, $\frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} \frac{1}{\Sigma_{tm} - K_m \vec{u} \cdot \vec{\Omega}}$ est solution de l'équation de trans-

port dans le modérateur sans source et on a :

$$\int_{(4\pi)} d\Omega \frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} \frac{1}{\Sigma_{tm} - K_m \vec{u} \cdot \vec{\Omega}} = 1$$

car

$$\frac{\Sigma_{sm}}{K_m} \operatorname{argth} \frac{K_m}{\Sigma_{tm}} = 1$$

On a aussi (voir annexe L) :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} du e^{-K_m \vec{u} \cdot \vec{\rho}} u_x = -I_1(K_m \rho) \cos \alpha$$

Par suite :

$$J_1(\vec{\rho}) = \int_{(4\pi)} i_1(\vec{\rho}, \vec{\Omega}) d\Omega = - \frac{I(K_m \rho)}{I(K_m b)} N_0(b) b \cos \alpha \quad (\text{IV.C.20})$$

On pose donc :

$$\zeta_{2x} = i_1 + \zeta'_{2x} \quad (\text{IV.C.21})$$

et

$$\psi_{2x}' = \int_{(4\pi)} d\Omega \zeta'_{2x}$$

Les équations (IV.C.16), (IV.C.17) et (IV.C.18) deviennent respectivement :

1 - dans le modérateur :

$$\text{div } \vec{\Omega} \zeta'_{2x} + \Sigma_{tm} \zeta'_{2x} = \frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} \psi'_{2x} \quad (\text{IV.C.22})$$

2 - dans la cavité :

$$\text{div } \vec{\Omega} \zeta'_{2x} = \Sigma_{tm} i_1 - \frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} J_1 \quad (\text{IV.C.23})$$

3 - dans le barreau :

$$\text{div } \vec{\Omega} \zeta'_{2x} + \Sigma_{tu} \zeta'_{2x} = \frac{\Sigma_{su}}{4\pi} \psi'_{2x} + (\Sigma_{tm} - \Sigma_{tu}) i_1 - \frac{\Sigma_{sm} - \Sigma_{su}}{4\pi} J_1 + \frac{\Sigma_{au}}{4\pi \Sigma_{am}} qx \quad (\text{IV.C.24})$$

et ψ'_{2x} s'annule à la frontière de la cellule.

Dans (IV.C.19), on désigne par :

- α_0 l'angle qui amène $\vec{u}$ sur $\vec{\rho}$,
- φ l'angle qui amène sur $\vec{\rho}$ la projection de $\vec{\Omega}$ dans le plan de section droite de la cellule,
- θ l'angle qui amène $\vec{\Omega}$ sur l'axe du canal.

L'expression i_1 prend la forme :

$$i_1(\rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha_0 \cos(\alpha - \alpha_0) \frac{e^{-K_m \rho \cos \alpha_0}}{\Sigma_{tm} - K_m \cos(\alpha_0 + \varphi) \sin \theta} \frac{N_0(b)}{I_1(K_m b)} b$$

(IV.C.25)

En remplaçant $\cos(\alpha - \alpha_0)$ par sa valeur $\cos \alpha \cos \alpha_0 + \sin \alpha \sin \alpha_0$, il vient :

$$i_1(\rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{2} [a_{1,1} \cos \alpha + a_{1,2} \sin \alpha] \frac{N_0(b)}{I_1(K_m b)} b$$

(IV.C.26)

où $a_{1,1}$ et $a_{1,2}$ sont des fonctions qui ont été définies au chapitre II, section A.

Les sources de ζ'_{2x} s'écrivent, en reprenant les notations de la fin de cette section,

dans la cavité :

$$\frac{1}{2} [z_1(\Sigma_{tm}, \Sigma_{sm}) \cos \alpha + z_2(\Sigma_{tm}) \sin \alpha] \frac{N_0(b)}{I_1(K_m b)} b$$

dans le barreau :

$$\frac{1}{2} [z_1(\Sigma_{tm} - \Sigma_{tu}, \Sigma_{sm} - \Sigma_{su}) \cos \alpha + z_2(\Sigma_{tm} - \Sigma_{tu}) \sin \alpha] \frac{N_o(b)}{I_1(K_m b)} b + \frac{\Sigma_{au}}{4\pi \Sigma_{am}} q x$$

On en déduit que la partie asymptotique, dans le modérateur de la cellule, du flux ψ'_{2x} a pour expression :

$$\psi'_{2xas}(\vec{\rho}) = \left(\frac{1}{2} \tilde{\beta}_b K_m \frac{N_o(b)}{I_1(K_m b)} b + \theta_{ub} \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q \right) K_m \Delta_1(K_m \rho) \cos \alpha$$

(IV.C.27)

dans laquelle $\tilde{\beta}_b$ est l'analogie, pour une cellule de rayon fini, du paramètre $\tilde{\beta}$ défini au chapitre II § B.1.

On a (cf II.B.3.27) :

$$\theta_{ub} = \frac{\theta_u}{(1 - \tilde{\beta} \frac{K_m^2}{2} S_o) I_1(K_m b)}$$

(IV.C.28)

On montrerait facilement, en reprenant le calcul de $\tilde{\beta}$, déjà cité, qu'on a également :

$$\tilde{\beta}_b = \frac{\tilde{\beta}}{(1 - \tilde{\beta} \frac{K_m^2}{2} S_o) I_1(K_m b)}$$

(IV.C.29)

Il suffit de remplacer dans chaque canal du réseau la source d'intensité $\frac{x}{4\pi}$, localisée au barreau, par la source $\mathcal{V}_1$ (définie au chapitre II § B.1).

De (IV.C.7), (IV.C.8), (IV.C.15) et (IV.C.21), il résulte que :

$$v_{1x} = \frac{\lambda_m q}{4\pi \Sigma_{am}} \Omega_x + \zeta_{1x} + x n_0 + i_1 + \zeta'_{2x} \quad (\text{IV.C.30})$$

et par intégration sur l'angle solide (4π) :

$$\phi_{1x} = \psi_{1x} + x N_0 - \frac{I_1(K_m \rho)}{I_1(K_m b)} N(b) b \cos \alpha + \psi'_{2x} \quad (\text{IV.C.31})$$

En vertu de (IV.C.5), (IV.C.12) et (IV.C.27), ϕ_{1x} possède dans le modérateur de la cellule une partie asymptotique qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \phi_{1xas}(\vec{\rho}) = & \frac{\beta_0}{(1 - \tilde{\beta} \frac{K_m^2}{2} S_0) I_1(K_m b)} \frac{q}{\Sigma_{am}} K_m \Delta_1(K_m \rho) \cos \alpha \\ & - \frac{\gamma_u \Sigma_{au}}{(1 - \tilde{\gamma} S_0) I_1(K_m b)} \frac{q}{\Sigma_{am}} [\Delta_0(K_m \rho) \rho - \frac{\Delta_0(K_m b)}{I_1(K_m b)} I_1(K_m \rho) b] \cos \alpha \\ & - \frac{1}{2} \frac{\tilde{\gamma} K_m \gamma_u \Delta_0(K_m b) b}{(1 - \tilde{\beta} \frac{K_m^2}{2} S_0)(1 - \tilde{\gamma} S_0)(I_1(K_m b))^3} \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q K_m \Delta_1(K_m \rho) \cos \alpha \end{aligned} \quad (\text{IV.C.32})$$

On a remplacé x par $\rho \cos \alpha$, $(\beta_c + \beta_u(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u}) + \Sigma_{au} \theta_u)$ par β_0 et $N_0(b)$ par sa valeur asymptotique.

Compte tenu de l'égalité $\Delta_0(K_m b) = \frac{1}{K_m b}$, (IV.C.32) peut s'écrire après quelques arrangements :

$$\begin{aligned} \phi_{1xas}(\vec{\rho}) = & - \frac{\gamma_u \Sigma_{au}}{(1 - \tilde{\gamma} S_0) I_1(K_m b)} \frac{q}{\Sigma_{am}} \left(\rho \Delta_0(K_m \rho) - \frac{I_1(K_m \rho)}{K_m I_1(K_m b)} \right) \cos \alpha \\ & + \frac{\left(\beta_0 - \frac{\gamma_u \Sigma_{au}}{(1 - \tilde{\gamma} S_0)} \frac{1}{2(I_1(K_m b))^2} \tilde{\gamma} \right)}{(1 - \tilde{\beta} \frac{K_m^2}{2} S_0) I_1(K_m b)} \frac{q}{\Sigma_{am}} K_m \Delta_1(K_m \rho) \cos \alpha \end{aligned} \quad (\text{IV.C.33})$$

On retrouve pour $\phi_{1\text{as}}$, au remplacement de S_{01} par $\frac{1}{2(I_1(K_m b))^2}$
près (cf (IV.B.33), l'expression (IV.B.44) obtenue en théorie hétérogène.
Cela constitue un excellent test de la nouvelle formulation hétérogène en
approximation dipolaire.

Section D

EXPRESSION ANALYTIQUE DU COEFFICIENT DE DIFFUSION RADIAL THERMIQUE EN FONCTION DES PARAMETRES HETEROGENES

La formule (IV.A.1) du coefficient de diffusion, appliquée au groupe thermique, peut encore s'écrire :

$$D_{ox} = \frac{\int_{S_{cel}} x \vec{j}_{1x} \cdot \vec{n} dS}{\int_{V_{cel}} \phi_0 dV} \quad (IV.D.1)$$

où S_{cel} est la surface extérieure de la cellule.
Cela résulte de l'égalité :

$$\text{div } x \vec{j}_{1x} = x \text{ div } \vec{j}_{1x} + j_{1xx}$$

et du théorème d'OSTROGRADSKY.

Après intégration de (IV.C.30) sur $\vec{\Omega} d\Omega$, il vient⁽¹⁾ :

$$\vec{j}_{1x} = \frac{\lambda_m}{3} \frac{q}{\Sigma_{am}} \vec{W} + \vec{g}_{1x} + x \vec{j}_0 + \int_{(4\pi)} \vec{\Omega} i_1 d\Omega + \vec{g}_{2x} \quad (IV.D.2)$$

où $\vec{W}$ est le vecteur unitaire de l'axe Ox.

On a posé :

(1)

On reprend les notations de la section précédente.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{j}_0 = \int_{(4\pi)} \vec{\Omega} n_0 d\Omega \end{array} \right. \quad (IV.D.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{g}_{1x} = \int_{(4\pi)} \vec{\Omega} \zeta_{1x} d\Omega \end{array} \right. \quad (IV.D.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{g}'_{2x} = \int_{(4\pi)} \vec{\Omega} \zeta'_{2x} d\Omega \end{array} \right. \quad (IV.D.5)$$

Le courant $\vec{j}_0$ est évidemment nul à la frontière de la cellule car il est dû à des sources de révolution autour de l'axe du canal.

Compte tenu de la formule (IV.C.19) définissant i_1 , on a :

$$\int_{(4\pi)} \vec{\Omega} i_1 d\Omega = \frac{1}{2\pi} \frac{\Sigma_{am}}{K_m} \int_{(2\pi)} du e^{-K_m \vec{u} \cdot \vec{\rho}} \vec{u} u_x \frac{N_0(b)}{I_1(K_m b)} b ;$$

car

$$\frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} \int_{(4\pi)} d\Omega \frac{\vec{\Omega}}{\Sigma_{tm} - K_m \vec{u} \cdot \vec{\Omega}} = \frac{\Sigma_{am}}{K_m} \vec{u}$$

Or, il est facile de voir que :

$$\int_{(2\pi)} du \vec{u} e^{-K_m \vec{u} \cdot \vec{\rho}} u_x = -\frac{1}{K_m} \text{grad} \left(\int_{(2\pi)} du e^{-K_m \vec{u} \cdot \vec{\rho}} u_x \right)$$

Compte tenu de l'égalité :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} du e^{-K_m \vec{u} \cdot \vec{\rho}} u_x = -I_1(K_m \rho) \cos \alpha ,$$

on a finalement :

$$\int_{(4\pi)} \vec{\Omega} \cdot \vec{r}_1 \, d\Omega = \frac{\Sigma_{am}}{K_m^2} \frac{N_o(b)}{I_1(K_m b)} b \, \text{grad} \left(I_1(K_m \rho) \frac{\vec{\rho}}{\rho} \cdot \vec{W} \right)$$

$$= \frac{\Sigma_{am}}{K_m^2} \frac{N_o(b)}{I_1(K_m b)} b \left(\frac{I_1(K_m \rho)}{\rho} \vec{W} + K_m \frac{I_2(K_m \rho)}{\rho^2} (\vec{\rho} \cdot \vec{W}) \vec{\rho} \right)$$

(IV.D.6)

On admettra qu'on peut remplacer à la frontière de la cellule ζ_{1x} et ζ'_{2x} par leurs parties asymptotiques respectives. On peut donc utiliser la loi de FICK pour calculer $\vec{g}_{1x}$ et $\vec{g}'_{2x}$ à cette frontière. Cela donne (cf. (IV.C.12) et (IV.C.27)), pour ρ voisin de b :

$$\vec{g}_{1x} = - \frac{\Sigma_{am}}{K_m^2} \text{grad} \left(\left[\beta_{cb} + \beta_{ub} \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) \right] \frac{q}{\Sigma_{am}} K_m \Delta_1(K_m \rho) \frac{\vec{\rho}}{\rho} \cdot \vec{W} \right)$$

$$\vec{g}'_{2x} = - \frac{\Sigma_{am}}{K_m^2} \text{grad} \left(\left[\frac{1}{2} \tilde{\beta}_b K_m \frac{N_o(b)}{I_1(K_m b)} b + \theta_{ub} \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q \right] K_m \Delta_1(K_m \rho) \frac{\vec{\rho}}{\rho} \cdot \vec{W} \right)$$

$$\text{On a : } \text{grad} \left(\Delta_1(K_m \rho) \frac{\vec{\rho}}{\rho} \cdot \vec{W} \right) = \frac{\Delta_1(K_m \rho)}{\rho} \vec{W} - K_m \frac{\Delta_2(K_m \rho)}{\rho^2} (\vec{\rho} \cdot \vec{W}) \vec{\rho}$$

$$\text{avec } \Delta_2(K_m \rho) = I_1(K_m b) K_2(K_m \rho) + K_1(K_m b) I_2(K_m \rho)$$

On en déduit, en vertu de (IV.C.13), (IV.C.14), (IV.C.28) et (IV.C.29), que :

$$\vec{g}_{1x} + \vec{g}'_{2x} = - \frac{\Sigma_{am}}{K_m^2} \left(\frac{\beta_o \frac{q}{\Sigma_{am}} + \frac{1}{2} \tilde{\beta}_b K_m b \frac{N_o(b)}{I_1(K_m b)}}{\left(1 - \tilde{\beta} \frac{K_m^2}{2} S_o \right) I_1(K_m b)} \right) K_m \left(\frac{\Delta_1(K_m \rho)}{\rho} \vec{W} - K_m \frac{\Delta_2(K_m \rho)}{\rho^2} (\vec{\rho} \cdot \vec{W}) \vec{\rho} \right)$$

Pour $\rho = b$ il est clair que :

$$\Delta_1(K_m \rho) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta_2(K_m \rho) = \frac{1}{K_m b}.$$

De (IV.D.6) et (IV.D.7), il résulte, en remplaçant $N_0(b)$ par sa valeur asymptotique, qu'à la frontière de la cellule, on a :

$$\begin{aligned} \vec{j}_{1x} \cdot \vec{n} = \frac{\lambda_m}{3} \frac{q}{\Sigma_{am}} & \left[\cos \alpha - \frac{\gamma_u \Sigma_{au} \frac{\Sigma_{am}}{K_m^2} \frac{3}{\lambda_m}}{K_m (1 - \tilde{\gamma} S_0) (I_1(K_m b))^2} \left(\frac{I_1(K_m b)}{b} \cos \alpha + K_m I_2(K_m b) \cos \alpha \right) \right. \\ & \left. + \frac{\Sigma_{am}}{K_m^2} \times \frac{3}{\lambda_m} \times \frac{\beta_0 - \frac{\gamma_u \Sigma_{au}}{(1 - \tilde{\gamma} S_0)} \frac{1}{2(I_1(K_m b))^2} \tilde{\beta}}{(1 - \tilde{\beta} \frac{K_m^2}{2} S_0) I_1(K_m b)} \frac{K_m}{b} \cos \alpha \right] \quad (\text{IV.D.8}) \end{aligned}$$

En portant cette expression dans (IV.D.1), écrite sous la forme :

$$D_{ox} = \frac{\int_0^{2\pi} d\alpha \, b^2 \cos \alpha (\vec{j}_{1x} \cdot \vec{n})}{\int_{V_{cel}} \phi_0 \, dV},$$

il vient :

$$\begin{aligned} \frac{D_{ox}}{\frac{1}{3} \lambda_m} = \frac{\frac{q}{\Sigma_{am}} \pi b^2}{\int_{V_{cel}} \phi_0 \, dV} & \left[1 - \frac{\gamma_u \Sigma_{au} \Sigma_{am} \frac{3}{\lambda_m}}{K_m^3 (1 - \tilde{\gamma} S_0) (I_1(K_m b))^2} \left(\frac{I_1(K_m b)}{b} + K_m I_2(K_m b) \right) \right. \\ & \left. + \frac{\Sigma_{am}}{K_m b} \frac{3}{\lambda_m} \frac{\beta_0 - \frac{\gamma_u \Sigma_{au} \tilde{\beta}}{(1 - \tilde{\gamma} S_0) 2(I_1(K_m b))^2}}{(1 - \tilde{\beta} \frac{K_m^2}{2} S_0) I_1(K_m b)} \right] \quad (\text{IV.D.9}) \end{aligned}$$

On montre en annexe F que l'expression analytique du facteur d'utilisation thermique f en fonction des paramètres hétérogènes polaires⁽¹⁾ s'écrit :

$$f = \frac{2\pi c}{K_m V_m} [K_1(K_m c) - S_0 I_1(K_m c)] \frac{\sum_{au} \gamma_u}{1 - \tilde{\gamma} S_0}$$

Si l'on remplace S_0 par sa valeur $\frac{K_1(K_m b)}{I_1(K_m b)}$ obtenue en supposant la cellule cylindrique,

$K_1(K_m c) - S_0 I_1(K_m c)$ devient $\frac{\Delta_1(K_m c)}{I_1(K_m b)}$. On en tire :

$$\frac{\sum_{au} \gamma_u}{(1 - \tilde{\gamma} S_0) I_1(K_m b)} = \frac{K_m V_m f}{2\pi c \Delta_1(K_m c)} \quad (\text{IV.D.10})$$

Soit ϕ_t la moyenne de ϕ_0 dans la cellule. On a :

$$\int_{V_{cel}} \phi_0 dV = V_t \phi_t \quad (\text{IV.D.11})$$

avec

$$V_t = \pi b^2$$

En substituant dans (IV.D.9) il vient :

$$\begin{aligned} \frac{D_{ox}}{\frac{1}{3} \lambda_m} = \frac{\frac{q}{\sum_{am}}}{\phi_t} & \left(1 - \frac{\sum_{am}}{K_m^2} \frac{3}{\lambda_m} \frac{f V_m \left(\frac{I_1(K_m b)}{b} + K_m I_2(K_m b) \right)}{2\pi c \Delta_1(K_m c) I_1(K_m b)} \right. \\ & \left. + \frac{\sum_{am}}{K_m b} \times \frac{3}{\lambda_m} \times \frac{\beta_0 - \tilde{\beta} \frac{K_m V_m f}{4\pi c \Delta_1(K_m c) I_1(K_m b)}}{(1 - \tilde{\beta} \frac{K_m^2}{2} S_0) I_1(K_m b)} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.D.12})$$

(1)

Rappelons que cette expression est équivalente à la formule ABH [10].

Il est facile de montrer que la valeur moyenne ϕ_m du flux ϕ_o , dans le modérateur de la cellule, s'écrit en fonction de f :

$$\phi_m = (1 - f) \frac{q}{\Sigma_{am}} \quad (\text{IV.D.13})$$

Par analogie, on pose :

$$\gamma_{\phi_m} = \frac{q}{\Sigma_{am}} \left(1 - f \frac{\Sigma_{am}}{K_m^2} \frac{3}{\lambda_m} \frac{V_m \left(\frac{I_1(K_m b)}{b} + K_m I_2(K_m b) \right)}{2\pi c \Delta_1(K_m c) I_1(K_m b)} \right) \quad (\text{IV.D.14})$$

en remarquant que $\frac{\Sigma_{am}}{K_m^2} \frac{3}{\lambda_m} \frac{V_m \left(\frac{I_1(K_m b)}{b} + K_m I_2(K_m b) \right)}{2\pi c \Delta_1(K_m c) I_1(K_m b)}$ est proche de 1 quand K_m est très petit.

Plus précisément, on montre en annexe M, qu'à un terme d'ordre deux en K_m près :

$$\gamma_{\phi_m} = \phi_m + q f \frac{3}{\lambda_m} \left(\frac{14}{15} \lambda_m^2 + \frac{1}{2} \left(b c \ln \frac{c}{b} + \frac{b^4 - c^4}{4 bc} \right) \frac{cb}{b^2 - c^2} - \frac{b^2}{4} \right) \quad (\text{IV.D.15})$$

La formule (IV.D.12) devient :

$$\frac{D_{ox}}{\frac{1}{3} \lambda_m} = \frac{\gamma_{\phi_m}}{\phi_t} + \frac{3}{\lambda_m} \frac{q}{\phi_t} \frac{\beta_o}{K_m b \left(1 - \gamma \frac{K_m^2}{2} S_o \right) I_1(K_m b)} \left(1 - \frac{\gamma}{\beta_o} \frac{K_m V_m f}{4\pi c \Delta_1(K_m c) I_1(K_m b)} \right)$$

(IV.D.16)

Cette formule a été établie en supposant la cellule cylindrique et en assimilant le flux à sa partie asymptotique dans le modérateur. Pour obtenir la formule proposée dans le formulaire de sa thèse [12], BENOIST a non seulement fait ces approximations mais il a aussi remplacé le flux angulaire v_o par sa valeur moyenne sur l'angle solide (4π) et sur le volume dans chacun des milieux de la cellule. Il est facile de voir (Annexe N) que la formule obtenue par BENOIST est équivalente à la suivante⁽¹⁾, écrite en fonction des paramètres hétérogènes :

$$\frac{D_{oxB}}{\frac{1}{3} \lambda_m} = \frac{\phi_m}{\phi_t} + \frac{3}{\lambda_m} \frac{\Sigma_{am}}{\phi_t} \frac{\beta_o}{K_m b (1 - \frac{K_m^2}{2} S_o) I_1(K_m b)} \left(\frac{\beta_u}{\beta_o} (\phi_u - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \phi_m) + \frac{\beta_c}{\beta_o} \phi_c \right)$$

(IV.D.17)

où ϕ_u et ϕ_c sont les moyennes de ϕ_o respectivement dans le barreau et la cavité.

La programmation sur IBM 360/91 de la formule (IV.D.16) a donné naissance au code PODIC⁽²⁾. Ce code calcule également la formule du coefficient de diffusion (avec et sans terme d'absorption) proposée par BENOIST dans le formulaire de sa thèse. La correction apportée par la nouvelle formule est généralement négative et peut atteindre de 5 à 17 % selon les cas (voir Chapitre VI - section C). Cette correction va dans le sens indiqué par BLACKBURN, qui a étudié de façon simplifiée les effets de non-isotropie et de non-uniformité du flux v_o [22]. Le terme correctif obtenu par BLACKBURN est cependant un peu surestimé (de 5 % environ).

(1)

On a inclus le terme $\frac{\int_{V_{cel}} x \operatorname{div} j_{1x} dV}{\int_{V_{cel}} \phi_o dV}$, équivalent à $\frac{- \int_{V_{cel}} \Sigma_a x \phi_{1x} dV}{\int_{V_{cel}} \phi_o dV}$

(terme d'absorption) avec les hypothèses de BENOIST (isotropie de v_o).

(2) PODIC est le sigle de Polaire - Dipolaire en Cellule.

Le terme d'ordre zéro du développement limité de (IV.D.16), suivant les puissances de K_m , a pour valeur⁽¹⁾ :

$$\frac{D_{ox}}{\frac{1}{3} \lambda_m} = \frac{\tilde{\phi}_m + \delta \tilde{\phi}_m}{\phi_t} \frac{1 + \frac{\tilde{\beta}}{b^2}}{1 - \frac{\tilde{\beta}}{b^2}} - \frac{\delta \tilde{\phi}_m}{\phi_t} \quad (\text{IV.D.18})$$

avec :

$$\delta \tilde{\phi}_m = 9 \text{ qf} \left(-\frac{\lambda_m}{5} + \frac{b^2}{8 \lambda_m} - \frac{\frac{4}{5} \lambda_m^3 + \frac{3}{4} c \lambda_m^2 + \frac{5}{12} c^2 \lambda_m + \frac{c^3}{6}}{4 (\lambda_m + c) \lambda_m} + \frac{c^2 \Lambda_{dip}}{2\pi (\lambda_m + c) \lambda_m} \right) \quad (\text{IV.D.19})$$

où Λ_{dip} est la "longueur d'extrapolation dipolaire" du canal (voir chapitre II § B.3 c).

En remplaçant $\tilde{\beta}$ dans (IV.D.18), par sa valeur tirée de (II.B.3.41), il vient :

$$\frac{D_{ox}}{\frac{1}{3} \lambda_m} = \frac{\tilde{\phi}_m + \delta \tilde{\phi}_m}{\phi_t} \frac{1 + \frac{V_c + V_u}{V_t} b'}{1 - \frac{V_c + V_u}{V_t} b'} - \frac{\delta \tilde{\phi}_m}{\phi_t} \quad (\text{IV.D.18 A})$$

où V_c et V_u sont les sections droites respectives de la cavité et du barreau, avec :

$$b' = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma + \frac{6\Lambda_{dip}}{\pi \lambda_m}} \quad (\text{IV.D.20})$$

On trouvera la définition des quantités γ et γ dans [12] section E.

(1) le terme suivant est d'ordre $K_m^2 \ln K_m$ (voir annexe M).

Application au cas du canal vide

Lorsque le canal est vide, on a vu (chapitre II § B.3 c) que :

$$\frac{6 \Lambda_{dip}}{\pi \lambda_m} = 1$$

On a aussi

$$\tilde{\phi}_m = \phi_m = b_t$$

et

$$\delta \tilde{\phi}_m = 0$$

La formule (IV.D.18 A) donne :

$$\frac{D_{ox}}{\frac{1}{3} \lambda_m} = \frac{1 + \frac{V_c}{V_t} b'}{1 - \frac{V_c}{V_t} b'} \quad \text{(IV.D.21)}$$

avec

$$b' = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma + 1}$$

On reconnaît en (IV.D.21) l'expression E.18 de [12].

La formule (IV.D.18) apparaît donc comme la généralisation, au cas du canal chargé, de la formule exacte E.18⁽¹⁾ du coefficient de diffusion, obtenue par BENOIST dans le cas du canal vide entouré par un modérateur non capturant.

Compte tenu de (IV.D.10) et (IV.D.16) l'expression asymptotique (IV.C.33) du flux antisymétrique ϕ_{1x} dans le modérateur de la cellule devient :

(1)

Lorsque le canal est vide, le flux angulaire v_o est uniforme et isotrope

$$\text{et le terme } \frac{\int_{V_{cel}} x \operatorname{div} \vec{j}_{1x} dV}{\int_{V_{cel}} \phi_o dV} \text{ est nul.}$$

$$\begin{aligned} \phi_{1xas}(\vec{\rho}) = & - \frac{K_m V_m f}{2\pi c \Delta_1(K_m c)} \frac{q}{\Sigma_{am}} \left(\Delta_0(K_m \rho) \rho - \frac{I_1(K_m \rho)}{K_m I_1(K_m b)} \right) \cos \alpha \\ & + \frac{K_m^2}{\Sigma_{am}} \frac{\lambda_m}{3} \phi_t b \left(\frac{D_{ox}}{\frac{1}{3} \lambda_m} - \frac{\phi_m}{\phi_t} \right) \Delta_1(K_m \rho) \cos \alpha \end{aligned} \quad (IV.D.22)$$

Comparativement, on montre en annexe N, que l'expression obtenue par BENOIST en I.10 de [12] peut s'écrire :

$$\phi_{1xas}(\vec{\rho})_B = \frac{K_m^2}{\Sigma_{am}} \frac{\lambda_m}{3} \phi_t b \left(\frac{D_{oxB}}{\frac{1}{3} \lambda_m} - \frac{\phi_m}{\phi_t} \right) \Delta_1(K_m \rho) \cos \alpha \quad (IV.D.23)$$

CHAPITRE V - CORRECTIONS DUES A L'ANISOTROPIE DU CHOC DANS LE MODERATEUR ET CORRECTIONS DUES AUX FUITES AXIALES

Section A

CORRECTIONS DUES A L'ANISOTROPIE DU CHOC DANS LE MODERATEUR

Dans un calcul de réacteur, l'anisotropie du choc dans le modérateur influe d'une manière non négligeable sur le bilan de réactivité. Cela nous amène à corriger certaines des formules établies au chapitre III. Nous "généraliserons"⁽¹⁾ à la théorie multigroupe la correction de BENOIST valable en théorie monocinétique [23] et [24]. Cela revient à assimiler le flux dans le modérateur à la solution asymptotique de l'équation du transport avec choc linéairement anisotrope et à calculer la longueur d'extrapolation polaire des canaux comme si le choc dans le modérateur était isotrope. On démontre en annexe O, que les expressions (III.A.10) et (III.A.14) deviennent respectivement :

$$1 + \frac{\Sigma_{sm}^g \Sigma_{am}^g}{(K_m^g)^2} 3 \bar{\mu} = \frac{\Sigma_{sm}^g + \Sigma_{tm}^g \frac{\Sigma_{sm}^g \Sigma_{am}^g}{(K_m^g)^2} 3 \bar{\mu}}{K_m^g} \operatorname{argth} \frac{K_m^g}{\Sigma_{tm}^g} \quad (V.A.1)$$

$$\frac{1}{K_g^{g'}} = \Sigma_{am}^g + \frac{1}{\frac{1}{K_m^{g'}} - \Sigma_{tm}^g} + \frac{3 \bar{\mu} \Sigma_{sm}^g}{(K_m^{g'})^2} \operatorname{argth} \frac{K_m^{g'}}{\Sigma_{tm}^g} \quad (V.A.2)$$

⁽¹⁾ Nous tiendrons compte de l'anisotropie du choc seulement à l'intérieur de chaque groupe. Nous supposerons isotrope le transfert de groupe à groupe.

où $\bar{\mu}$ représente le cosinus moyen de l'angle de déflexion⁽¹⁾.

Corrélativement, dans la formule de la "longueur d'extrapolation dipolaire"⁽²⁾, la valeur de λ_m^g doit être prise égale au libre parcours de

transport $(\frac{1}{\Sigma_{tm}^g - \bar{\mu} \Sigma_{sm}^g})$ dans le modérateur. La présence de λ_m^g dans cette

formule résulte de l'utilisation des relations existant entre les probabilités fictives. On est obligé d'attribuer la même valeur au (symbole) λ_m^g qui figure, en tête, dans l'expression (II.B.3.29) de la fonction f . C'est une question de cohérence avec la manière dont f et $\Lambda_{k_{dip}}^g$ ont été introduits dans le formalisme (voir annexe H § H.3, H.4 et H.5). Il n'y a pas d'autre changement à opérer dans les formules. Cela découle du fait que si l'on calcule la longueur d'extrapolation polaire des canaux comme si le choc était isotrope dans le modérateur, on admet implicitement que le courant entrant dans le canal doit s'exprimer (au moyen du noyau de l'opérateur intégral du transport dans le modérateur) seulement à partir du terme isotrope de la diffusion (cf. [25]). On supposera que le choc est isotrope dans le combustible.

(1) voir problème type page 59.

(2) ainsi que dans celle de P_k^{+g} et de ses éléments P_{uk}^{+g} , P_{ck}^{+g} et $P_{\bar{u}k}^{+g}$.

Section B

CORRECTIONS DUES AUX FUITES AXIALES

En théorie hétérogène, on s'est longtemps contenté (cf. [4]) de tenir compte des fuites axiales sous la forme de captures additionnelles réparties uniformément dans chaque réseau régulier du réacteur. De ce point de vue, rien ne permet de distinguer la théorie hétérogène de la théorie homogène. Cependant, la densité des fuites axiales dans les canaux est, en général, très supérieure à celle qui existe dans le modérateur⁽¹⁾. En uniformisant les fuites axiales dans chaque réseau, on rend le modérateur responsable de fuites qui se produisent, en réalité, dans les canaux. Cette façon de procéder conduit certainement à fausser le calcul de la structure du flux. Il paraît préférable, comme dans [9], de traiter séparément les fuites axiales existant dans le modérateur de celles existant dans les canaux. C'est ce qu'on a tenté de faire ici en collaboration avec BENOIST. Les résultats numériques semblent en bon accord avec les résultats expérimentaux (voir chapitre VI).

Considérons un réacteur de hauteur finie et dépourvu d'hétérogénéités axiales; on peut séparer la distribution axiale du flux de la partie radiale. Soient $\vec{\rho}$ et z les composantes radiale et axiale de $\vec{r}$. On écrit :

$$\phi(\vec{r}) = \phi_{Bz}(\vec{\rho}) \cos B_z z$$

où B_z^2 est le laplacien géométrique axial du réacteur.

On a :

$$(B_z)^2 = \left(\frac{\pi}{H_e}\right)^2 \quad (V.B.1)$$

H_e étant la hauteur extrapolée du réacteur.

(1) Dans un réacteur modéré au graphite, les fuites axiales dans les canaux représentent à peu près la moitié des fuites axiales totales.

Prise en compte des fuites axiales dans le modérateur

Il est facile de montrer, en assimilant le flux réel à sa partie asymptotique, que les fuites axiales $\frac{\partial J_z}{\partial z}$, dans l'équation de conservation du modérateur sont égales, dans le groupe g, à :

$$\frac{\Sigma_{am}^g}{(K_m^g)^2} B_z^2 \phi^g$$

Il paraît tout indiqué d'incorporer les fuites axiales dans les captures et de calculer la partie radiale du flux comme si le réacteur était de hauteur infinie. Cela revient à ajouter $\frac{\Sigma_{am}^g}{(K_m^g)^2} B_z^2$ à Σ_{am}^g .

Corrélativement, il est facile de voir, que dans le groupe g, la partie radiale de la solution asymptotique de l'équation du transport sans source dans le modérateur, satisfait à la relation :

$$\nabla^2 \chi^g - (K_m^{g^2} + B_z^2) \chi^g = 0, \quad (V.B.2)$$

K_m^g étant la solution de l'équation (V.A.1).

Au niveau du groupe g, la longueur de diffusion radiale dans le modérateur est donc donnée par $(K_m^{g^2} + B_z^2)^{-1/2}$.

Pour ne pas surcharger les notations, les nouvelles valeurs de la section d'absorption et de la longueur de diffusion radiale du modérateur, dans le groupe g, seront encore notées Σ_{am}^g et $(K_m^g)^{-1}$. Pour les différencier des anciennes valeurs, on désignera ces dernières par $\Sigma_{am_\infty}^g$ et $(K_{m_\infty}^g)^{-1}$. On aura donc :

$$\Sigma_{am}^g = \Sigma_{am_\infty}^g + \frac{\Sigma_{am_\infty}^g}{(K_{m_\infty}^g)^2} B_z^2$$

$$K_m^g = (K_{m_\infty}^{g^2} + B_z^2)^{1/2}$$

La quantité $k_g^{g'}$ a été définie au chapitre III, section A, comme le rapport entre la source de ralentissement issue du groupe g' et le flux scalaire créé par cette source dans le groupe g , en milieu modérateur infini. Elle doit donc garder la valeur qui lui a été attribuée en supposant la hauteur du réacteur infinie.

Prise en compte des fuites axiales localisées aux canaux

D'un autre côté, les fuites axiales augmentent la probabilité pour un neutron, venant du modérateur, de disparaître dans chaque canal. Nous admettrons que ce phénomène est essentiellement de nature "polaire". Cet accroissement de probabilité $\Gamma_{u_0}^{'+(1)}$ peut donc être égalé aux fuites axiales du canal, rapportées au courant entrant à sa périphérie. Pour un canal placé dans un réseau, les fuites axiales dans le canal sont égales à la différence entre les fuites axiales de la cellule du réseau et les fuites axiales du modérateur de la cellule. On écrit :

$$\Gamma_{u_0}^{'+(1)} = B_z^2 \frac{D_{//} \int_{V_{cel}} \phi \, dV - D_m \int_{V_m} \phi \, dV}{S j^-} \quad (V.B.3)$$

où $D_{//}$ et D_m sont respectivement les coefficients de diffusion du réseau et du modérateur ,

S est la surface extérieure du canal ,

V_{cel} et V_m sont les volumes respectifs de la cellule et du modérateur de la cellule ,

j^- est le courant entrant dans le canal par unité de surface.

On montre (voir annexe P) en se limitant au schéma monocinétique et en admettant la validité de la formule du coefficient de diffusion axial proposée par BENOIST à la fin de sa thèse, qu'au niveau de chaque groupe, pour un canal situé en cellule ouverte, on a :

$$\Gamma_{u_0}'^{(1)} = \frac{2}{3\pi c} \lambda_m B_z^2 \mathcal{P} \left\{ V_u \left(1 + \frac{\phi_m}{\phi_u} \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) + \frac{a}{\lambda_m} \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \frac{\phi_m}{\phi_u} \right) T_z \right) \right. \\ \left. + V_c \left(\frac{\phi_m}{\phi_u} + \frac{\phi_c}{\phi_u} \left(1 + \frac{c-a}{\lambda_m} Q_z \right) + \frac{a}{\lambda_m} \left(\frac{\phi_c}{\phi_u} \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) + 1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \frac{\phi_m}{\phi_u} \right) W_z \right) \right\} \quad (V.B.4)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \frac{\phi_c}{\phi_u} &= G' + a \Sigma_{au} \bar{N} \\ \frac{\phi_m}{\phi_u} &= \frac{1}{\mathcal{P}} + \frac{K_m}{\Sigma_{am}} \frac{V_u \Sigma_{au}}{2\pi c} \frac{K_o(K_m c)}{K_1(K_m c)} + \frac{V_u \Sigma_{au}}{\pi c} \left(\frac{3}{2} \lambda_N - 2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (V.B.5)$$

et $G' = \frac{1}{\mathcal{P}} - a \Sigma_{au}$

Les indices u et c désignent respectivement le combustible central et la cavité circulaire du canal (toujours supposé composé de deux milieux). De plus,

λ_i est le libre parcours de transport du milieu i de la cellule,

V_i le volume du même milieu,

a et c les rayons respectifs du barreau et du canal,

$\mathcal{P}$ la probabilité, en l'absence de fuites axiales, pour un neutron né isotropiquement et uniformément dans le barreau d'en sortir,

Q_z , W_z et T_z les probabilités fictives (réduites)⁽¹⁾ de premier choc, relativement à la direction axiale⁽²⁾ ($Q_z = p_{cc_z} = \frac{\lambda_c}{c-a} p_{cc_z}$)

$$W_z = p_{cu_z} = \frac{\lambda_u}{a} p_{cu_z}, \quad T_z = p_{uu_z} = \frac{\lambda_u}{a} p_{uu_z},$$

(1) Voir [12].

(2) Voir chapitre II § B.3 a du présent mémoire.

$$\bar{N} \text{ une fonction de } \alpha = \frac{a}{c} \text{ tabulée dans [12] } (\bar{N} = \frac{1 - \frac{2}{\pi} \varphi_0 - \frac{1}{\pi} \sin 2 \varphi_0}{1 - \alpha^2})$$

avec $\varphi_0 = \arcsin \alpha$

et λ_N la longueur d'extrapolation du canal noir de rayon c .

Si l'on appelle $\Gamma_{u_0}'^{+(0)}$ la noirceur du canal, en l'absence de fuites axiales, on montre dans [10] que :

$$\Gamma_{u_0}'^{+(0)} = \frac{2 a^2 \Sigma_{au}}{c} \mathcal{P} \quad (\text{V.B.6})$$

En ajoutant $\Gamma_{u_0}'^{+(1)}$ à $\Gamma_{u_0}'^{+(0)}$, on obtient la probabilité $\Gamma_{u_0}'^{+}$ pour un neutron venant du modérateur, de disparaître dans le canal, par fuites axiales ou par capture. C'est cette probabilité, et non $\Gamma_{u_0}'^{+(0)}$, qu'il faut utiliser pour calculer la longueur d'extrapolation polaire Λ dont dépend $\tilde{\gamma}$. Ce paramètre hétérogène caractérise en effet la réaction externe du canal lorsqu'on introduit des sources de révolution dans le modérateur (voir annexe C). Cela donne :

$$\Lambda = \lambda_N + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{\Gamma_{u_0}'^{+(0)} + \Gamma_{u_0}'^{+(1)}} - 1 \right) \quad (\text{V.B.7})$$

En procédant de la sorte, dans le cas du canal vide, on retrouve la formule établie par DAVISON dans [26]. En effet, dans ce cas, (V.B.4) donne :

$$\Gamma_{u_0}'^{+(1)} = \frac{4 B_z^2}{3 S} \lambda_m \left[2 V_c + \frac{V_c}{\lambda_m} Q_z c \right]$$

avec

$$V_c = \pi c^2$$

et

$$S = 2 \pi c.$$

Compte tenu de la correction de courbure axiale donnée à la page 74 de [12], on a :

$$Q_z = 2 - \frac{3}{8} B_z S,$$

donc :

$$\Gamma_{u_0}^{'(1)} = \frac{4 B_z^2 \lambda_m}{3} c \left[1 + \frac{c}{\lambda_m} \left(1 - \frac{3}{8} B_z \pi c \right) \right]$$

En vertu de (V.B.7), lorsque B_z^2 est très petit, on peut écrire :

$$\Lambda = \frac{4}{3} \frac{1}{\Gamma_{u_0}^{'(1)}}$$

car $\Gamma_{u_0}^{'(0)} = 0.$

A la frontière du canal, le flux asymptotique polaire est lié à sa dérivée par la relation (voir Annexe F) :

$$\frac{\phi_{as}(c)}{\phi'_{as}(c)} = \lambda_m \Lambda$$

On en déduit l'égalité :

$$\frac{\phi_{as}(c)}{\phi'_{as}(c)} = \frac{\lambda_m}{B_z^2 c(c + \lambda_m)} \left(1 + \frac{3}{8} B_z \frac{\pi c^2}{c + \lambda_m} \right)$$

C'est aux notations près, le résultat obtenu par DAVISON.

On vérifiera aisément que dans le cas du canal noir $\Gamma_{u_0}'^{+(1)} = 0$ (car T_z est en $\frac{\lambda_u}{a}$, voir [12] section C). Les fuites axiales sont nulles dans un corps noir ; tous les neutrons sont absorbés.

Pour un neutron quittant le modérateur et qui disparaît dans le canal, $\frac{\Gamma_{u_0}'^{+(0)}}{\Gamma_{u_0}'^{+}}$ est la probabilité qu'il ait disparu par capture dans le barreau. Parmi les quantités envisagées, au cours du chapitre II, certaines représentent la capture dans le barreau de neutrons venant du modérateur. Entrent dans cette catégorie, le facteur d'utilisation thermique et la quantité $p_o^{(1)}$ (formule (II.C.1.9)). Ces quantités représentent maintenant, compte tenu de (V.B.7), la disparition des neutrons dans le canal, par fuites ou par captures. Il faut donc les multiplier par $\frac{\Gamma_{u_0}'^{+(0)}}{\Gamma_{u_0}'^{+}}$, pour obtenir les captures correspondantes dans le barreau. La formule ABH du facteur d'utilisation thermique devient, compte tenu de (D.5) de l'annexe D :

$$f = \frac{\Gamma_{u_0}'^{+(0)}}{\Gamma_{u_0}'^{+}} \frac{1}{\frac{V_m K_m \Delta_o (K_m c)}{2 \pi c \Delta_1 (K_m c)} + \frac{3}{2} \frac{V_m \Sigma_{am}}{\pi c} \Lambda} \quad (V.B.8)$$

Cette expression représente la probabilité $P_{mu_o}^*$ pour un neutron né isotropiquement et uniformément dans le modérateur de la cellule d'être capturé dans le barreau en présence des fuites axiales.

Par réciprocité, on en déduit que la probabilité $P_{um_o}^*$, pour un neutron né isotropiquement et uniformément dans le barreau, d'être capturé dans le modérateur de la cellule (toujours en présence des fuites axiales), s'écrit :

$$P_{um_o}^* = \frac{V_m \Sigma_{am}}{V_u \Sigma_{au}} \frac{\Gamma_{u_0}'^{+(0)}}{\Gamma_{u_0}'^{+}} \frac{1}{\frac{V_m K_m \Delta_o (K_m c)}{2 \pi c \Delta_1 (K_m c)} + \frac{3}{2} \frac{V_m \Sigma_{am}}{\pi c} \Lambda}$$

⁽¹⁾ La quantité p_o est étroitement liée à $\tilde{\gamma}$.

A la limite, lorsque le rayon de la cellule tend vers l'infini, cette expression devient :

$$P_{um_o}^* = \frac{\Gamma_{u_o}^{'+(o)}}{\Gamma_{u_o}^{'+}} \frac{1}{\left(\frac{K_m K_o (K_m c)}{\Sigma_{am} K_1 (K_m c)} + 3\Lambda \right) \frac{\Sigma_{au} V_u}{2 \pi c}} \quad (V.B.9)$$

Or le paramètre hétérogène γ_u , défini dans la cellule de rayon infini que constitue la géométrie k , est précisément égal à (reprendre (II.B.2.1) dans l'optique de cette section):

$$\gamma_u = \frac{P_{um_o}^* V_u K_m}{2 \pi c \Sigma_{am} K_1 (K_m c)}$$

En remplaçant dans cette formule $P_{um_o}^*$ par sa valeur tirée de (V.B.9), il vient :

$$\gamma_u = \frac{\Gamma_{u_o}^{'+(o)}}{\Gamma_{u_o}^{'+}} \frac{K_m}{\Sigma_{au} (3 \Lambda \Sigma_{am} K_1 (K_m c) + K_m K_o (K_m c))} \quad (V.B.10)$$

Corrélativement, il est facile de voir, que la formule (II.B.2.3) de $1 - P_{uu_o}^*$ devient :

$$1 - P_{uu_o}^* = \frac{\pi c \Gamma_{u_o}^{'+(o)}}{2 \Sigma_{au} V_u} \left[1 - \frac{\Gamma_{u_o}^{'+(o)}}{\Gamma_{u_o}^{'+}} \frac{K_m K_o (K_m c) + (3\lambda_N - 4) \Sigma_{am} K_1 (K_m c)}{K_m K_o (K_m c) + 3 \Lambda \Sigma_{am} K_1 (K_m c)} \right] \quad (V.B.11)$$

On peut vérifier que lorsque les fuites axiales sont nulles ($\Gamma_{u_o}^{'+} = \Gamma_{u_o}^{'+(o)}$), (V.B.10) et (V.B.11) redonnent les formules (II.B.2.4) de γ_u et (II.B.2.3) de $(1 - P_{uu_o}^*)$ obtenues au chapitre II en supposant la hauteur du réacteur infinie.

Les présentes spécifications s'étendent sans difficultés à la théorie multigroupe. Pour calculer les quantités caractéristiques du canal k dans chaque groupe, on s'est toujours ramené à la théorie monocinétique. Les expressions de Λ_k^g , γ_{uk}^g , $1 - P_{uu}^{*g}$ et $p_{ok}(g' \rightarrow g)$ deviennent respectivement :

$$\Lambda_k^g = \lambda_N^g + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{\Gamma_{uok}^{'+g}} - 1 \right) \quad (V.B.12)$$

$$\gamma_{uk}^g = \frac{\Gamma_{uok}^{'+(0)g}}{\Gamma_{uok}^{'+g}} \frac{K_m^g}{\Sigma_{auk}^g \left(3 \Lambda_k^g \Sigma_{am}^g K_1(K_m^g c) + K_m^g K_o(K_m^g c) \right)} \quad (V.B.13)$$

$$1 - P_{uu}^{*g} = \frac{\pi c \Gamma_{uok}^{'+(0)g}}{2 \Sigma_{auk}^g V_u} \left[1 - \frac{\Gamma_{uok}^{'+(0)g}}{\Gamma_{uok}^{'+g}} \frac{K_m^g K_o(K_m^g c) + (3 \lambda_N^g - 4) \Sigma_{am}^g K_1(K_m^g c)}{K_m^g K_o(K_m^g c) + 3 \Lambda_k^g \Sigma_{am}^g K_1(K_m^g c)} \right] \quad (V.B.14)$$

$$p_{ok}(g' \rightarrow g) = \frac{\Gamma_{uok}^{'+(0)g}}{\Gamma_{uok}^{'+g}} \frac{2\pi c}{V_u} \left[-\frac{\gamma_{uk}^{g',g}}{\gamma_{uk}^g} \frac{K_1(K_m^g c)}{K_m^g} \Sigma_{am}^g + \left(\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta_{g',g}}{K_m^{g'}} \right) \frac{I_1(K_m^{g'} c)}{K_m^{g'}} \right] \quad (V.B.15)$$

avec
$$\Gamma_{uok}^{'+g} = \Gamma_{uok}^{'+(0)g} + \Gamma_{uok}^{'+(1)g} \quad (V.B.16)$$

$\Gamma_{uok}^{'+(0)g}$ et $\Gamma_{uok}^{'+(1)g}$ étant respectivement calculées par les formules (V.B.6) et (V.B.4), à partir des caractéristiques monocinétiques que possèdent le canal k et le modérateur au niveau du groupe g .

Les autres quantités, introduites dans la nouvelle formulation hétérogène, pour caractériser le canal k en "polaire", ne varient en fonction des fuites axiales que par l'intermédiaire de Λ_k^g , γ_{uk}^g , P_{uu}^{*g} , $p_{ok}(g' \rightarrow g)$, Σ_{am}^g et K_m^g . Il n'est donc pas nécessaire de les réécrire ici. On doit cependant faire mention d'une particularité. Dans l'expression (III.A.33) de

$\mu_k(g' \rightarrow g)$, le produit $\Sigma_{au_k}^g \gamma_{uk}^g$ n'apparaît que pour traduire la réaction externe du canal k en présence des sources de ralentissement réparties dans le modérateur. Ce produit ne doit dépendre que de Λ_k^g . On fera par

suite abstraction du facteur $\frac{\Gamma_{uok}^{'+(0)g}}{\Gamma_{uok}^{'+g}}$ dans (V.B.13) pour calculer le paramètre γ_{uk}^g qui intervient dans (III.A.33).

Toutes les fuites axiales du canal ayant été prises en compte par la correction des paramètres hétérogènes polaires, les paramètres hétérogènes dipolaires ne sont modifiés que par l'intermédiaire de Σ_{am}^g et K_m^g .

Le code FODITH calcule toutes ces corrections et donne en sortie, à titre indicatif, la valeur du rapport $\frac{\Gamma_{uok}^{'+(0)g}}{\Gamma_{uok}^{'+g}}$ dans chaque groupe, sous le nom de rapport des noirceurs.

CHAPITRE VI - RESULTATS NUMERIQUES - COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE

Section A

PRESENTATION DU CODE HETEROGENE DIPOLAIRE FODITH, COMPARAISON NUMERIQUE AVEC RIFIFI (code de diffusion), HECTOR (code sources-puits) et PODIPO (code sources-puits dipolaire)

La programmation sur machine IBM 360/91 des formules établies au chapitre III et corrigées au chapitre V a donné naissance au code FODITH. Ce code peut travailler, au gré de l'utilisateur, soit en approximation polaire, soit en approximation dipolaire (voir chapitre II § B.1). Il recherche, itérativement, la solution physique de l'équation de criticité en utilisant au mieux les particularités des matrices A, C et G. Cette solution se compose du facteur de multiplication effectif du réacteur et d'un vecteur dont les composantes sont liées au flux. De ce vecteur, le code déduit les taux d'absorption thermiques⁽¹⁾ et le gradient moyen du flux thermique dans les barreaux. Il calcule, dans le modérateur, la valeur du flux dans chacun des groupes aux points qui lui sont indiqués par l'utilisateur. En version normale, FODITH permet de traiter 100 canaux différents (au lieu de 70 pour HECTOR) par secteur, symétrie déduite, et ce en théorie à 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 groupes. L'ordre de symétrie peut être égal à 1, 2, 3, 4, 6, 8 ou 12. L'encombrement de ce code est alors de 379 K. Le temps de calcul varie beaucoup avec l'initialisation du vecteur dans la recherche itérative de la solution de l'équation de criticité. Il dépend évidemment du nombre de canaux, du nombre de groupes et de l'ordre de symétrie envisagés. A titre d'exemple, le calcul dipolaire en théorie à deux groupes, d'un réacteur de symétrie 4, à 3 zones, comportant 39 canaux par secteur a pris 28 secondes⁽²⁾ en initialisation standard (toutes les composantes polaires du vecteur initial égalées à l'unité et toutes les composantes dipolaires égalées à ZERO). Avec une meilleure initialisation, il aurait pu être réduit d'environ 14 secondes. Il existe une version de FODITH qui permet de traiter

⁽¹⁾ Dans sa dernière version FODITH calcule les taux d'absorption dans chaque groupe.

⁽²⁾ Il s'agit d'un temps MAJONG. Le calcul des paramètres hétérogènes prend moins de 30 centièmes de seconde (temps réel) par type de canal.

250 canaux par secteur. Elle occupe 760 K en machine (encombrement maximum en multiprogrammation 800 K). Le calcul dipolaire d'un réacteur de symétrie 12 comportant 250 canaux par secteur (3000 canaux au total) doit prendre aux environs de 15 minutes en initialisation standard. Les performances de FODITH peuvent sans doute être sensiblement améliorées (au moins par un facteur 9 sur le temps et 2 sur l'encombrement). Ce code n'étant pas, à l'origine, destiné à la production mais plutôt à fournir un instrument de référence n'a pas été optimisé au point de vue programmation. Le code FODITH est décrit avec plus de détails dans [13].

Avant de tester FODITH sur des cas présentant un intérêt pratique, on s'est assuré que ce code, vis-à-vis de la formulation théorique, ne contenait aucune erreur. On a vérifié que le calcul à la machine de bureau d'un réacteur à deux canaux donnait bien les mêmes résultats que FODITH (avec sorties intermédiaires). Pour mémoire, le facteur de multiplication effectif d'un réacteur de 623 cm de hauteur, modéré au graphite, doté d'un réflecteur (de graphite) d'épaisseur infinie et comportant deux canaux de 170 mm de diamètre contenant chacun un barreau d'uranium naturel de 50 mm de diamètre, est de 0.399289 (les canaux sont distants de 708.35 mm).

Avant de passer en revue les différents résultats numériques obtenus, il est bon de rappeler brièvement ce qu'on attend d'un code hétérogène⁽¹⁾.

En principe, un code homogène ne convient que pour calculer les réacteurs composés de larges zones (que celles-ci aient mêmes propriétés diffusantes ou non) ; un code sources-puits permet de calculer les réacteurs possédant des zones étroites mais à condition que les propriétés diffusantes du réacteur soient uniformes. Par opposition, un code hétérogène est destiné à calculer n'importe quel réacteur⁽²⁾ et, en particulier, il doit permettre le calcul de réacteurs à zones étroites possédant des propriétés diffusantes différentes. Ainsi les résultats numériques fournis par FODITH devraient toujours être satisfaisants même quand ceux de RIFIFI (code homogène) et d'HECTOR (code sources-puits) ne le sont pas.

(1) *On résume ce qui a été dit dans l'introduction.*

(2) *à neutrons thermiques et dont les canaux sont suffisamment espacés (cf. page 8).*

Nous vérifierons d'abord que FODITH calcule correctement la réactivité dans les cas où on est sûr que RIFIFI donne de bons résultats.

On a calculé dix réacteurs du type MARIUS (l'ensemble COREGRAF + RIFIFI a été ajusté⁽¹⁾ sur MARIUS), quatre à une zone et six à deux zones. Chaque zone est constituée d'un large réseau régulier carré. Tous les réseaux ont la même hauteur (623,35 cm) et le même pas (317 mm). Ils sont modérés au graphite et contiennent le même type de combustible, un barreau d'uranium naturel, sans gaine et sans bouchon, de 50 mm de diamètre. Les réseaux ne diffèrent entre eux que par la dimension des cavités entourant le combustible. Le diamètre des canaux dans le réseau A est de 170 mm ;

"	"	B	110 mm ;
"	"	C	70 mm ;
"	"	D	50,2 mm.

Les réacteurs à deux zones sont formés par la juxtaposition du réseau A, placé au centre ou en périphérie, et d'un des trois autres réseaux. Tous les réacteurs sont dotés d'un réflecteur de graphite d'épaisseur infinie. Ils sont tous, par construction, proches de la criticité. Le tableau n° 1 permet de comparer les résultats numériques fournis par HECTOR, PODIPO (code dipolaire⁽²⁾ tiré d'HECTOR), FODITH polaire et FODITH dipolaire à ceux de RIFIFI (les calculs sont exécutés en théorie à deux groupes).

Pour obtenir des résultats RIFIFI comparables à ceux des autres codes, on a dû faire passer trois calculs RIFIFI par réacteur. Par construction, HECTOR, PODIPO et FODITH traitent le réflecteur comme s'il avait les mêmes propriétés neutroniques que le modérateur du coeur (hypothèse du modérateur unique). En admettant que ces trois codes calculent bien le coeur du réacteur, l'économie du réflecteur ne peut être estimée à sa juste valeur. Par ailleurs, les propriétés attribuées au modérateur central par les trois codes sont différentes. Dans HECTOR, le modérateur réel est remplacé par une pâte homogène ayant les propriétés absorbantes (moins les puits) et diffusantes (radiàles et axiales) du coeur⁽³⁾. Dans PODIPO, on

⁽¹⁾ COREGRAF est le code de cellule qui fournit, entre autres, les données de RIFIFI.

⁽²⁾ cf. [7].

⁽³⁾ voir (1) page 148.

Résultats numériques Cas tests a = 2.5 b = 17.87262 (pas = 317 mm) réseau carré H=623.35	$\frac{k_{eff} R_{ifif1} R_H}{k_{eff} Hector Age} - 1$	$\frac{k_{eff} R_{ifif1} R_P}{k_{eff} Podipo Age} - 1$	$\frac{k_{eff} R_{ifif1} R_F}{k_{eff} Fodith Polaire} - 1$	$\frac{k_{eff} R_{ifif1} R_F}{k_{eff} Fodith Dipolaire} - 1$	Aires de migra- tion radiale et axiale données par COREGRAF en cm ²	Aires de migra- tion radiale et axiale données par M2 HET en cm ²
c = 8.50 réseau A 146 cx	+ 137	+ 1266	- 688	+ 196	920.25 1298.65	886.83 1379.37
c = 5.50 réseau B 104 cx	+ 166	+ 394	- 385	- 46	699.42 762.84	678.26 768.74
c = 3.50 réseau C 96 cx	+ 178	+ 188	- 246	- 188	654.89 660.49	629.32 638.51
c = 2.51 réseau D 94 cx	+ 180	+ 159	- 257	- 277	660.14 660.33	628.35 629.03
c = 5.50 / c = 8.50 86 cx ds la zone cen. 116 cx au total	- 468	+ 1046	- 471	+ 87		
c = 8.50 / c = 5.50 86 cx / 124 cx	+ 949	+ 557	- 591	+ 20		
c = 3.50 / c = 8.50 70 cx / 116 cx	- 794	+ 1286	- 465	+ 78		
c = 8.50 / c = 3.50 86 cx / 124 cx	+ 1211	+ 395	- 589	- 72		
c = 2.51 / c = 8.50 70 cx / 116 cx	- 864	+ 1317	- 442	+ 75		
c = 8.50 / c = 2.51 86 cx / 124 cx	+ 1251	+ 376	- 626	- 122		

Tableau n° 1
Comparaison RIFIFI, HECTOR, PODIPO et FODITH

Le barreau de combustible envisagé est sans gaines et sans bouchons.
 k_{eff} = facteur de multiplication effectif cx : abréviation de canaux
RH : Réflecteur Hector de rayon infini - RP : Réflecteur Podipo de rayon infini
RF : Réflecteur FODITH de rayon infini.

a = rayon du barreau de combustible (en cm)
c = rayon des canaux (en cm)
b = rayon de la cellule (en cm)
H = hauteur du réseau (en cm).

conserve les propriétés de diffusion *radiales* du modérateur réel, mais, comme dans HECTOR, on donne au modérateur central les propriétés absorbantes (moins les puits) et diffusantes *axiales* du coeur⁽¹⁾. Dans FODITH, enfin, le modérateur considéré est le modérateur réel, mais avec le spectre (certainement différent de celui du réflecteur) que lui impose la proximité du combustible. Il est cependant possible, dans les données RIFIFI, d'attribuer⁽²⁾ au réflecteur les propriétés du "modérateur" d'un de ces codes. RIFIFI et ce code calculent alors bien le même réacteur. Leurs résultats sont comparables. C'est pourquoi chaque réacteur a été calculé trois fois par RIFIFI, une fois avec le "réflecteur" HECTOR, une fois avec le "réflecteur" PODIPO^{et} une dernière fois avec le "réflecteur" FODITH.

Dans la colonne 1 (respectivement 2, 3 et 4) du tableau, on compare la valeur du facteur de multiplication effectif k_{eff} calculée par HECTOR (resp. PODIPO, FODITH polaire et FODITH dipolaire) à celle que donne RIFIFI lorsque le réflecteur du réacteur a les données HECTOR (resp. PODIPO, FODITH et FODITH).

On constate que dans le cas des réacteurs à une zone l'accord entre HECTOR et RIFIFI est excellent. Le rapport des deux k_{eff} ne dépend pratiquement pas du réacteur envisagé. La théorie le laissait prévoir car les propriétés diffusantes du coeur d'un réacteur à une zone sont uniformes. Dans le cas des réacteurs à deux zones, il n'en va plus de même. On relève un écart de plus de 2000 pcm entre deux valeurs du rapport des k_{eff} . Les deux zones sont relativement larges, mais leurs propriétés diffusantes sont nettement différentes (voir les dernières colonnes du tableau). Un code sources-puits tel qu'HECTOR n'est pas conçu pour calculer ce type de réacteur. Par contre, on sait [27] que RIFIFI peut en donner la réactivité à plus ou moins 200 pcm près (maximum). C'est l'explication des écarts constatés.

(1) Ce processus est appliqué lorsque le réacteur est à une zone. Lorsque le réacteur est à plusieurs zones, on définit dans HECTOR et PODIPO un "modérateur" par zone. Ce modérateur a les propriétés absorbantes (moins les puits) et diffusantes radiales (pour HECTOR uniquement) et axiales de la zone. Les fonctions d'influence partant d'un canal sont alors calculées en fonction des propriétés du "modérateur" qui entoure le canal. De ce fait le réflecteur a alors les propriétés du "modérateur" de la zone périphérique.

(2) Voir annexe Q.

En examinant les résultats de la colonne 2, on s'aperçoit que, dans le cas des réacteurs à une zone, l'accord entre PODIPO et RIFIFI est loin d'être parfait⁽¹⁾. Cela peut paraître surprenant étant donné que PODIPO a été construit à partir d'HECTOR. L'auteur [7] de PODIPO pense que la méthode qu'il a utilisée pour calculer les paramètres dipolaires (ajustement sur $\langle r^2 \rangle$) est insuffisante.

REMARQUE

La validité de l'approximation podipolaire⁽²⁾, sur laquelle repose la formalisme PODIPO, est en tout cas, hors de cause. On a pu, en effet, simuler dans FODITH cette approximation, en annulant, après calcul, les fonctions d'influence "dipolaire - dipolaire" de la matrice de géométrie et les coefficients caractéristiques (b_k^1 et d_k^1) relatifs à la partie antisymétrique de la source de fission. Les résultats obtenus (voir tableau n° 2) attestent de la validité de l'approximation podipolaire. Les écarts en réactivité, par rapport à ce que donne FODITH dipolaire complet, ne dépassent pas 8 pcm dans le cas des réacteurs à une zone et 40 pcm dans celui des réacteurs à deux zones. L'erreur sur le flux est inférieure au pour cent. Cela permet d'ailleurs d'envisager l'utilisation de l'approximation podipolaire pour améliorer (voir fin du chapitre II) les performances de FODITH. On espère pouvoir traiter⁽³⁾, en théorie à deux groupes, un réacteur de 220 canaux sans symétrie en 7 s alors que 4 mn 34 s sont nécessaires avec la version actuelle de FODITH dipolaire. REUSS a estimé qu'HECTOR mettrait environ 3 mn pour faire le même travail. Le temps d'utilisation de FODITH deviendrait alors comparable à celui des codes de diffusion à deux dimensions (DAIXY met 4 s pour traiter un réacteur de 220 canaux à deux groupes, mais il ne fournit que la structure macroscopique du flux et n'est, en toute rigueur, pas applicable lorsque le réacteur comprend des irrégularités "fines" du genre barres de contrôle).

En ce qui concerne le calcul des réacteurs à deux zones, il semblerait que PODIPO soit un peu meilleur qu'HECTOR sans pour cela être vraiment satisfaisant.

[1] On remarquera que le désaccord augmente avec la taille des canaux.

[2] Le principe en a été exposé à la fin du chapitre II.

[3] en mettant à profit toutes les autres possibilités d'amélioration de la programmation de FODITH.

Quand on compare les chiffres de la colonne 3 à ceux de la colonne 4 du tableau n° 1, on constate que FODITH dans sa version polaire donne toujours de la réactivité une valeur supérieure - ou égale - à celle que donne FODITH dipolaire. L'explication en est simple. Dans FODITH polaire on considère évidemment que les paramètres dipolaires sont nuls. La formule du coefficient de diffusion thermique donnée en (IV.D.16) se réduit, dans ces conditions, à :

$$\frac{D_{ox}}{\frac{1}{3} \lambda_m} = \frac{\tilde{\phi}_m}{\phi_t}$$

Or les calculs de PODIC (code de calcul de la nouvelle formule du coefficient de diffusion thermique) montrent qu'on a toujours $\tilde{\phi}_m < \phi_t$. Par suite, FODITH polaire sous-estime fortement les fuites thermiques. On montrerait facilement qu'il en va de même dans le domaine rapide. Il en résulte que la réactivité calculée par FODITH polaire ne peut être inférieure à celle que donne FODITH dipolaire. Ces deux versions du même code utilisent, en effet, les mêmes données (sections efficaces moyennes par milieu). Elles ne donnent la même réactivité que si les paramètres dipolaires sont effectivement nuls. Cela ne se produit que lorsque les dimensions des cavités comprises dans les canaux sont petites (voir tableau n° 4, pour $c = 2.51$).

Etant donné que FODITH polaire n'estime pas les fuites à leur juste valeur, il n'y a rien à attendre de la comparaison FODITH polaire - RIFIFI. La relative constance de l'écart entre la réactivité calculée par FODITH polaire et celle que donne RIFIFI, avec réflecteur FODITH, sur l'ensemble des réacteurs à deux zones, ne constitue qu'une heureuse circonstance. De toute façon, cet écart est trop élevé.

La différence (voir colonne 4) entre les réactivités calculées par RIFIFI (avec réflecteur FODITH) et FODITH dipolaire, dans le cas des réacteurs à une zone, croît (algébriquement) avec le rayon du canal. Elle passe de - 277 à + 196 pcm lorsque le rayon du canal augmente de 2.51 à 8.50 cm. Il existe donc un certain décalage entre les deux codes. Or on a utilisé, par souci de cohérence, le même code de cellule COREGRAF 2 pour élaborer leurs données, COREGRAF fournit directement le k_∞ à RIFIFI. Par ailleurs,

on a déduit des sorties habituelles de COREGRAF (sections effectives, η , ϵ et p) les sections efficaces à entrer dans FODITH de telle sorte que le calcul analytique, à deux groupes, du réseau infini, par la formulation de FODITH donne les quatre facteurs (f , η , ϵ , p) du k_{∞} COREGRAF (voir ⁽¹⁾ Annexe R).

FODITH et RIFIFI attribuent donc à chaque réseau le même k_{∞} . Le décalage ne peut donc provenir que d'une divergence dans la manière de calculer les fuites.

RIFIFI utilise les aires de migration radiale et axiale que lui fournit COREGRAF au moyen des coefficients de diffusion et des sections efficaces d'absorption. FODITH calcule directement les fuites en tenant compte de la géométrie et de la valeur des sections efficaces de chacun des milieux. Dans COREGRAF, pour calculer les coefficients de diffusion, on fait essentiellement deux approximations : d'une part, dans l'équation (IV.1.17) de [11] on remplace le flux d'ordre zéro par la valeur moyenne de sa densité ⁽²⁾ sur l'angle solide (4π) et le volume dans chaque milieu de la cellule (voir chapitre IV du présent exposé) ; d'autre part, on néglige le couplage intergroupe (les sources antisymétriques de ralentissement et de fission). Par ailleurs, on assimile le flux réel à sa partie asymptotique dans le modérateur. On se limite à cette dernière hypothèse, dans FODITH, pour calculer les fuites radiales. Cependant, pour évaluer l'influence des fuites axiales

(1) Le résultat de l'intégration de l'équation du transport sur le domaine d'énergie réservé à chaque groupe montre qu'il faut utiliser les sections efficaces moyennes et non les sections effectives si l'on veut respecter f et p . Cela conduit à ajuster la section d'absorption rapide du combustible, sur p , en utilisant la théorie ABH.

Les quantités ϵ et η sont intégrées dans les données de FODITH en posant :

$$(\nu \Sigma_f)_{th} = \eta \epsilon (\Sigma_a)_{th}.$$

(2) La densité est le flux divisé par la vitesse. Il n'est pas cohérent de calculer la section efficace d'absorption de la cellule en moyennant les sections effectives par les densités - ce qui revient à un facteur près à calculer la section efficace moyenne (sur l'énergie) de la cellule - et de calculer le coefficient de diffusion en utilisant les densités et non les flux (cf. [28]).

sur la noirceur des canaux (cf. chapitre V - section B), on fait appel à peu près aux mêmes approximations que dans COREGRAF sauf qu'on ne remplace pas le flux par la densité (voir Annexe P). On doit donc s'attendre à ce que FODITH et COREGRAF n'attribuent pas les mêmes propriétés diffusantes à chaque réseau, à moins que les approximations faites dans COREGRAF soient assez bien justifiées.

A cela il faut ajouter que dans RIFIFI on tient compte des fuites radiales et axiales de façon séparée et que dans FODITH on tient compte de l'influence des fuites axiales sur les fuites radiales. Dans RIFIFI, à la section d'absorption Σ_a sont ajoutées les captures apparentes $D_R B_R^2$ et $D_Z B_Z^2$, où D_R et D_Z sont les termes d'ordre zéro des développements en série de B^2 des coefficients de diffusion radial et axial. Le facteur de multiplication effectif s'écrit :

$$k_{\text{eff}} = \frac{k_{\infty}}{1 + M_R^2 B_R^2 + M_Z^2 B_Z^2} \quad (\text{VI.A.1})$$

Dans FODITH les fuites radiales sont calculées, une fois que les sections d'absorption ont été corrigées en fonction des fuites axiales⁽¹⁾ (voir chapitre V - section B). Le facteur de multiplication effectif s'écrit :

$$k_{\text{eff}} = \frac{k_{\infty}}{(1 + M_Z^2 B_Z^2)(1 + M_R^2 B_R^2)} \quad (\text{VI.A.2})$$

en présence
des fuites
axiales

Si l'on utilise les mêmes aires de migration pour calculer ces deux formules, l'écart en réactivité (pour un réacteur de type MARIUS) peut atteindre 200 pcm. Le décalage entre FODITH dipolaire et RIFIFI peut donc être attribué à deux causes :

⁽¹⁾ Par là même, on ignore l'influence des fuites radiales sur les fuites axiales.

1. On fait moins d'approximations dans FODITH pour calculer les aires de migration que dans COREGRAF.

2. La manière de faire intervenir les fuites dans RIFIFI et dans FODITH n'est pas la même.

En cherchant analytiquement, par la nouvelle formulation hétérogène, à quelle condition le flux macroscopique (les taux d'absorption) peut être en $e^{\vec{B} \cdot \vec{r}}$, on a obtenu⁽¹⁾ les expressions du k_{∞} , de l'aire de migration radiale et du k_{eff} "FODITH". Partant du sous-programme de FODITH qui calcule les paramètres hétérogènes, on a programmé ces expressions sur IBM 360/91. Le code obtenu, M2HET, calcule, à deux groupes, le k_{∞} , l'aire de migration radiale et le k_{eff} d'un réseau carré, de hauteur infinie, en 30 centièmes de seconde. A l'aide de ce code, on peut également atteindre la valeur de l'aire de migration axiale. En effet, pour tenir compte des fuites axiales, dans la nouvelle formulation hétérogène, on corrige la valeur des paramètres mais on ne modifie pas le formalisme établi en supposant le réacteur de hauteur infinie. M2HET est donc applicable si la hauteur est finie. A la place du k_{∞} , M2HET fournit alors le k_{eff} du réseau en la seule présence des fuites axiales. Connaissant le laplacien axial et le k_{∞} vrai, il est facile d'en déduire l'aire de migration axiale. La bonne valeur de l'aire de migration radiale (qui est indépendante des fuites axiales au premier ordre en B_z^2) est évidemment celle que l'on obtient en calculant le réseau de hauteur infinie.

Les résultats obtenus par M2HET ont été disposés en colonne 6 du tableau n° 1 en face de ceux de COREGRAF (colonne 5). Sur la première ligne de chaque case, on trouve l'aire de migration radiale, sur la seconde l'aire de migration axiale.

On constate que dans tous les cas COREGRAF surestime l'aire de migration radiale et ce d'autant plus^(en valeur relative) que la dimension des cavités est plus petite. Cela peut s'expliquer en remarquant que plus la dimension des cavités est grande plus l'approximation (faite dans COREGRAF) de remplacer le flux d'ordre zéro par sa valeur moyenne sur l'angle solide et le volume dans

(1) voir annexe S.

de la cellule
chaque milieu est justifiable. En effet, on se rapproche de la situation du canal vide dans laquelle le flux d'ordre zéro est uniforme et isotrope dans toute la cellule. Cependant M2HET donne une valeur de l'aire de migration axiale plus élevée que celle que fournit COREGRAF, sauf dans le cas des petites cavités. C'est une des deux raisons pour lesquelles le décalage entre FODITH et RIFIFI change de signe lorsque le rayon des canaux passe de 2.51 à 8.50 centimètres - l'autre raison étant l'augmentation du terme $M_Z^2 B_Z^2 \times M_R^2 B_R^2$ dans la formule (VI.A.2). L'examen des approximations faites dans COREGRAF et non utilisées dans FODITH ne permet pas de comprendre aisément pourquoi l'aire de migration axiale calculée par M2HET s'écarte de celle de COREGRAF dans un sens plutôt que l'autre. En tout état de cause, on vérifie que lorsque la dimension des cavités est faible les valeurs données par M2HET (aussi bien que par COREGRAF), de l'aire de migration axiale et de l'aire de migration radiale, sont égales.

Il est possible de supprimer le décalage entre FODITH et RIFIFI (dans le cas des réacteurs à une zone) à condition de fournir⁽¹⁾ à FODITH un k_∞ différent de celui que calcule COREGRAF. Le k_∞ COREGRAF ne résulte pas d'un ajustement direct sur l'expérience. Celle-ci ne permet d'atteindre que les valeurs du k_{eff} et des laplaciens radial et axial. C'est en portant ces valeurs et celles des aires de migration (radiale et axiale) calculées par COREGRAF dans la formule (VI.A.1) que l'on obtient le k_∞ COREGRAF. Cette façon de procéder est cohérente avec le formalisme RIFIFI. Mais elle ne conduit qu'à une valeur approximative du k_∞ étant donné que diverses approximations sont faites dans COREGRAF pour calculer les aires de migration et que l'on néglige le couplage fuites radiales - fuites axiales dans (VI.A.1). La valeur du k_∞ qu'il faudrait fournir à FODITH est celle qui utilisée dans (VI.A.2) conjointement avec les aires de migration calculées par M2HET permet de retrouver le k_{eff} expérimental à partir des valeurs des laplaciens. Elle se déduit de la valeur du k_∞ COREGRAF par la formule :

$$k_{\infty}^{FODITH} = \frac{(1 + M_{Z,M2HET}^2 B_Z^2)(1 + M_{R,M2HET}^2 B_R^2)}{1 + M_{Z,COR}^2 B_Z^2 + M_{R,COR}^2 B_R^2} k_{\infty}^{COR} \quad \text{en présence des fuites axiales} \quad (VI.A.3)$$

⁽¹⁾ par l'intermédiaire des sections efficaces

Résultats numériques	$k_{eff}^{Rififi\ RH} - 1$ $k_{eff}^{Hector\ Age}$	$k_{eff}^{Rififi\ RF} - 1$ $k_{eff}^{Fodith\ Dipolaire}$	Aire de migra- tion radiale donnée par COREGRAF en cm^2	Aire de migra- tion radiale donnée par FODITH en cm^2
Cas tests a = 2.50 b = 17.87262 réseau carré H = 623.35				
c = 8.50 Réseau A 146 cx	+ 137	+ 71	920.25	886.83
c = 5.50 Réseau B 104 cx	+ 166	+ 64	699.42	678.26
c = 3.50 Réseau C 96 cx	+ 178	+ 62	654.89	629.32
c = 2.51 Réseau D 94 cx	+ 180	+ 27	660.14	628.35
c = 5.5 / c = 8.5 86cx ds la zone cen. 116 cx au total	- 468	+ 173		
c = 8.5/ c = 5.5 86 cx / 124 cx	+ 949	- 68		
c = 3.5/ c = 8.5 70 cx / 116 cx	- 794	+ 261		
c = 8.5/ c = 3.5 86 cx / 124 cx	+ 1211	- 142		
c = 2.51/ c = 8.5 70 cx / 116 cx	- 864	+ 300		
c = 8.5/ c = 2.51 86 cx / 124 cx	+ 1251	- 187		

Le barreau de combustible envisagé est sans gânes et sans bouchons.

k_{eff} : facteur de multiplication effectif

cx : canaux

RH : Réflecteur Hector de rayon infini

RF : Réflecteur Fodith de rayon infini.

Toutes les données géométriques sont exprimées en cm.

Tableau n° 3

Comparaison de FODITH dipolaire ajusté à RIFIFI

Il est commode de corriger la valeur du $(\nu \Sigma_f)_{th}$, fournie par COREGRAF à FODITH, en sorte⁽¹⁾ que (VI.A.3) soit respectée.

On vérifie en examinant les résultats de la colonne 2 du tableau n° 3 que lorsque FODITH est ainsi "ajusté", il donne sensiblement le même k_{eff} que RIFIFI (avec réflecteur FODITH), dans le cas des réacteurs à une zone. Il n'en va pas de même, dans le cas des réacteurs à deux zones. Lorsque FODITH n'était pas ajusté, le décalage était assez faible (voir tableau n° 1). Il se produisait une sorte de compensation entre les écarts (RIFIFI - FODITH dipolaire non ajusté) constatés séparément pour chaque réseau (dans le cas des réacteurs à une zone). FODITH dipolaire étant maintenant ajusté sur RIFIFI, cet effet compensatoire ne peut plus jouer. Néanmoins la valeur absolue des différences de réactivité enregistrées ne dépasse guère l'ordre de grandeur de l'imprécision attribuée à RIFIFI (cf. page 148). On peut trouver deux origines à ces différences :

1. La zone périphérique des réacteurs envisagés n'est finalement pas très large. Elle comprend moins de canaux que la zone centrale et elle est répartie sur une plus grande surface.

Elle comprend à peine plus d'une couronne⁽²⁾ (voir figure 1) de canaux. L'utilisation de la théorie de l'homogénéisation (sur laquelle repose RIFIFI) n'est donc pas entièrement justifiée.

2. Les propriétés diffusantes étant différemment évaluées par FODITH dipolaire et RIFIFI, l'incidence de l'égalité des courants aux frontières sur la courbure du flux n'a pas la même importance dans les deux codes.

Ayant déterminé une méthode pour ajuster FODITH dipolaire sur l'expérience, par l'intermédiaire de l'ensemble COREGRAF + RIFIFI, on peut maintenant envisager de tester la validité de FODITH sur des cas expérimentaux.

⁽¹⁾ L'incertitude qui pèse sur η (1500 pcm environ) justifie en partie cette manière d'agir.

⁽²⁾ C'est en cherchant des configurations proches de la criticité qu'on a été amené à réduire le nombre de canaux de la zone périphérique.

Nota : Dans le tableau n° 4 ont été inscrites, à titre indicatif, les valeurs des principaux paramètres hétérogènes $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\beta}$ des canaux précédemment envisagés. On remarquera que le paramètre $\tilde{\beta}$ tend à s'annuler pour une dimension de la cavité petite mais non nulle et que sa valeur dépend plus de cette dimension que de l'énergie.

Type de canal a = 2.5	Valeurs des paramètres	Paramètre polaire $\tilde{\gamma}$ de groupe à groupe			Paramètre dipolaire $\tilde{\beta}$ de groupe à groupe		
		1 → 1	1 → 2	2 → 2	1 → 1	1 → 2	2 → 2
c = 8.50	A	+ 0.1454	- 0.1664	- 0.2361	70.35	59.16	56.69
c = 5.50	B	+ 0.0303	- 0.1961	- 0.2206	20.34	18.56	18.19
c = 3.50	C	- 0.0093	- 0.1981	- 0.2065	4.018	3.647	3.628
c = 2.51	D	- 0.0205	- 0.1939	- 0.1977	0.0328	-0.0978	- 0.0738

Tableau n° 4

Cas tests. Valeur des paramètres,
Variation des paramètres en fonction du rayon du canal

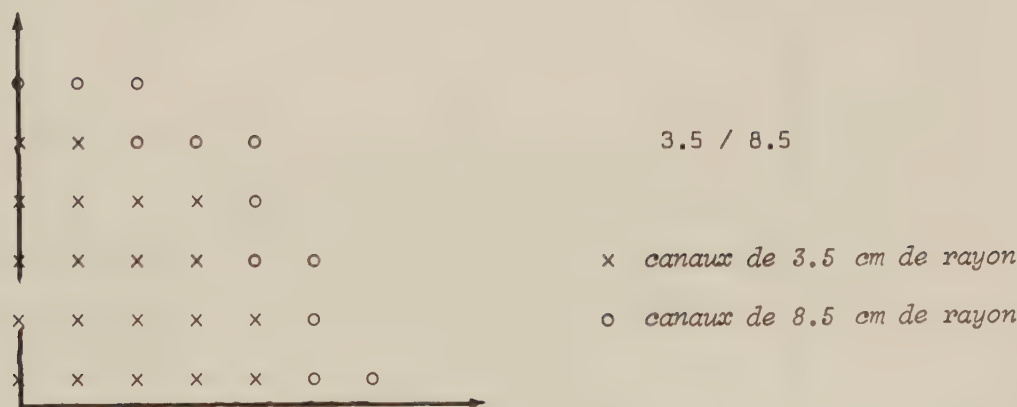
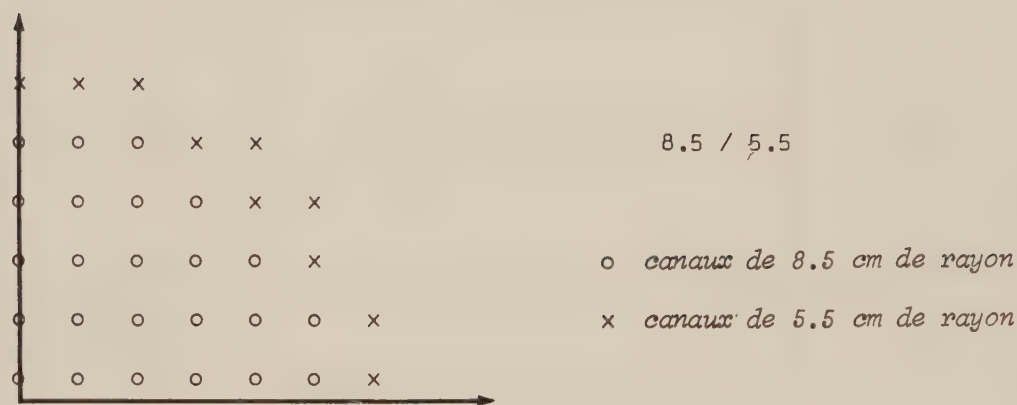
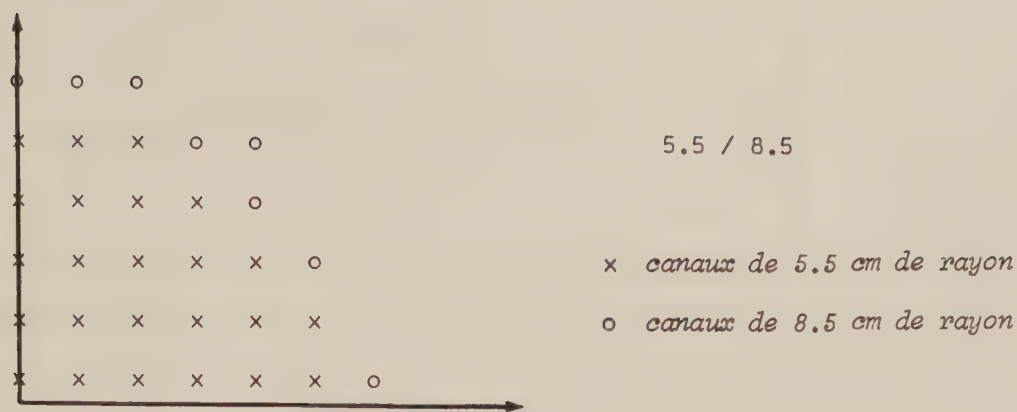
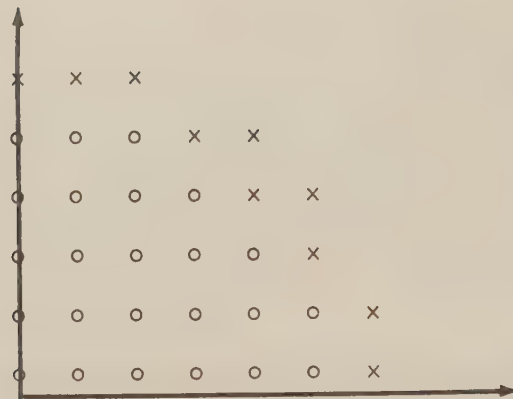


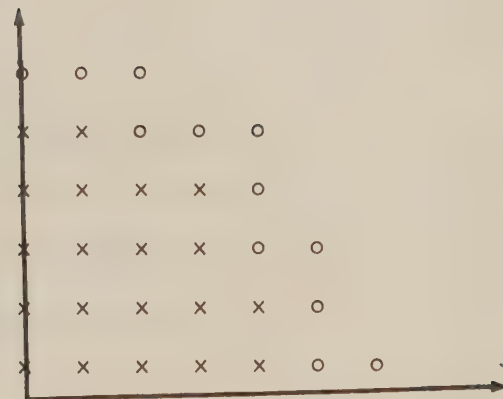
Figure 1 - Premier quart des réacteurs tests à deux zones



8.5 / 3.5

o canaux de 8.5 cm de rayon

x " de 3.5 cm de rayon



2.51 / 8.5

x canaux de 2.51 cm de rayon

o canaux de 8.50 cm de rayon



8.5 / 2.51

o canaux de 8.50 cm de rayon

x canaux de 2.51 cm de rayon

Figure 1 - Premier quart des réacteurs tests à deux zones

Section B

COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE

Le problème est de savoir si FODITH dipolaire est effectivement capable de déterminer la réactivité et la structure du flux à l'intérieur d'un réacteur comportant d'étroites irrégularités au point de vue diffusion, ralentissement et absorption. Comme en pareil cas les codes de diffusion et les codes sources puits ne peuvent donner des résultats satisfaisants (cf. page 145) on est amené à faire appel à l'expérience pour obtenir les éléments de référence. Par ailleurs, la prudence nous invite à contrôler, sur des cas réels, les conclusions tirées de l'étude précédemment réalisée en calculant des réacteurs académiques.

La première partie de cette section est consacrée à la détermination de la réactivité, la seconde au calcul du flux.

Première partie - Détermination de la réactivité (les calculs sont exécutés en théorie à deux groupes)

On a choisi sept réacteurs parmi ceux qui ont été expérimentés dans MARIUS (I) et (II), pour tester l'aptitude de FODITH à calculer la réactivité. Il s'agit de cinq réacteurs à une zone⁽¹⁾ 1A1B28A1, 1C1B50B, 2D2B50D/2D2B50D, 2D3B50D/2D3B50D et 2D4B50D/2D4B50D, d'un réacteur à deux zones larges 2D5B50D/2D4B50D et d'un réacteur à trois zones étroites 1E4B50B/1C1B31/1C1B50B. La répartition des canaux dans ces réacteurs est représentée en annexe T.

La comparaison des réactivités calculées et de la réactivité mesurée doit permettre dans le cas des six premiers réacteurs de contrôler les conclusions de l'étude précédente, et dans le cas du septième réacteur, d'éprouver les capacités de FODITH à calculer un réacteur comportant des zones étroites de propriétés diffusantes et ralentissantes différentes (voir tableau n° 6).

⁽¹⁾ Parmi eux se trouvent trois réacteurs dont la zone périphérique diffère très légèrement de la zone centrale (pour des raisons technologiques). Ils se distinguent des deux autres par une désignation double.

Dans les quatre dernières colonnes du tableau n° 5, on a inscrit les résultats des calculs FODITH (dipolaire ajusté), HECTOR et RIFIFI en face des résultats expérimentaux. Les calculs HECTOR et FODITH ont été exécutés en supposant le rayon du réflecteur infini. Leurs résultats ont, de ce fait, été corrigés. On a admis (sauf dans le cas du réacteur à trois zones) qu'en simulant successivement dans RIFIFI les propriétés des réflecteurs HECTOR et FODITH, on pouvait⁽¹⁾, connaissant les résultats du calcul RIFIFI avec réflecteur réel, atteindre par différence, les corrections à appliquer aux valeurs calculées respectivement par HECTOR et FODITH. Cela revient à admettre les relations :

$$\begin{aligned}
 k_{\text{eff}}^{\text{HECTOR(avec réflecteur réel)}} - k_{\text{eff}}^{\text{HECTOR(avec réflecteur infini)}} &= \\
 &\text{HECTOR} \\
 k_{\text{eff}}^{\text{RIFIFI(avec réflecteur réel)}} - k_{\text{eff}}^{\text{RIFIFI(avec réflecteur infini)}} &= \\
 &\text{HECTOR} \\
 k_{\text{eff}}^{\text{FODITH(avec réflecteur réel)}} - k_{\text{eff}}^{\text{FODITH(avec réflecteur infini)}} &= \\
 &\text{FODITH} \\
 k_{\text{eff}}^{\text{RIFIFI(avec réflecteur réel)}} - k_{\text{eff}}^{\text{RIFIFI(avec réflecteur infini)}} &= \\
 &\text{FODITH}
 \end{aligned}$$

Dans le cas du réacteur à trois zones 1E4B50B/1C1B31/1C1B50B, on s'est contenté d'appliquer au résultat HECTOR la (faible) correction RIFIFI obtenue dans le cas de la pile pure 1C1B50B ; le calcul FODITH a été repris en simulant la frontière extérieure du réacteur par des barres noires.

(1) On rappelle que non seulement FODITH et HECTOR supposent le réflecteur de rayon infini mais lui attribuent des propriétés différentes de la réalité (hypothèse du modérateur unique et infiniment étendu, voir page 146). Dans l'élaboration de leurs données on pourrait évidemment simuler la présence du réflecteur réel. Il suffirait d'entourer le coeur de grosses barres remplies de modérateur ayant les propriétés du réflecteur et de placer à la périphérie des barres noires pour représenter la frontière extérieure du réacteur. Mais ce procédé, tout en ne reproduisant pas fidèlement la réalité grèverait fortement le potentiel des codes quant au nombre maximum de canaux pouvant être pris en considération. Il est préférable de ne recourir à ce procédé que lorsque la correction par RIFIFI n'est pas justifiable (cas des réacteurs à zones étroites).

$k_{eff} - 1$ Réacteurs envisagés	HECTOR AGE	RIFIPI avec un-réfléc-teur infini du type HECTOR	FUDITH DIPOLAIRE ajusté	RIFIPI avec un réfléc-teur infini du type FODITH	RIFIPI avec le réflecteur réel d'épaisseur finie	Valeur expérimentale	Valeur corrigée HECTOR AGE	Valeur corrigée FODITH DIPOLAIRE
1A1B28AL 332 cx	+ 345	+ 369	+ 697	+ 719	+ 388	+ 232	+ 364	+ 366
1C1B50B 134 cx	+ 452	+ 533	+ 705	+ 814	+ 501	+ 296	+ 420	+ 392
202B500/202B500 a = 2.5 c = 4.5 124 cx	- 73	+ 52	+ 323	+ 290	+ 48	- 19	+ 77	+ 81
203B500/203B500 a = 2.5 c = 5.5 120 cx	- 138	+ 18	+ 374	+ 359	+ 81	- 20	+ 75	+ 96
204B500/204B500 a = 2.5 c = 7.0 130 cx	- 168	- 22	+ 514	+ 503	+ 148	- 8	+ 2	+ 159
205B500/204B500 a = 8.5 c = 7.0 162 cx	- 416	+ 83	+ 531	+ 579	+ 114	- 38	- 385	+ 66
1E4B50B/C1B31/ 1C1B50B 45/16/72 cx	-2205	-	+ 32	-	+1730	+ 159	-2237***	- 86**

* avec barres noires simulant la frontière extérieure du réacteur.

** valeur corrigée en se référant au cas de la pile pour 1C1B50B.

Voir dans le tableau n° 6 les caractéristiques géométriques des réseaux.

Tableau n° 5 - Comparaison avec l'expérience -
Calcul de la réactivité.

On constate que dans l'ensemble, les résultats fournis par FODITH sont en bon accord avec l'expérience⁽¹⁾. Dans le cas des réacteurs à une zone, ils diffèrent peu de ceux calculés par HECTOR et RIFIFI. Mais dans le cas du réacteur à deux zones (aux propriétés diffusantes et ralentissantes distinctes, voir tableau n° 6), HECTOR donne une valeur de la réactivité assez éloignée de la réalité. Les conclusions de l'étude précédente ne sont donc pas remises en cause. Dans le cas du réacteur à trois zones, les valeurs trouvées par RIFIFI et HECTOR s'écartent (dans les sens opposés) de plus de 1500 pcm de la réactivité expérimentale, tandis que celle obtenue par FODITH s'en approche à moins de 250 pcm. Cette dernière valeur est contestable dans la mesure où l'on a confondu (suivant l'hypothèse du modérateur unique) les propriétés du réflecteur avec celles du modérateur de la zone périphérique⁽²⁾ (zone qui occupe la plus grande surface dans le coeur de la pile). La correction à lui appliquer peut être évaluée en se référant au cas de la pile pure 1C1B50B. On trouve : - 195 pcm. Il n'est pas évident que cette correction ne serait pas compensée si FODITH pouvait tenir complètement compte des effets de spectre. Bien que les paramètres hétérogènes utilisés dans ce code soient explicitement indépendants du flux, ils restent néanmoins concernés par les variations des sections efficaces en fonction du spectre. Or il n'existe actuellement pas d'option⁽³⁾ dans FODITH qui permette de prendre en considération ces variations. Les valeurs des sections efficaces moyennes fournies à ce code, pour chaque canal et le modérateur environnant, dérivent d'un calcul de cellule ; et le spectre calculé en cellule diffère certainement de celui qui existe au voisinage de la frontière de deux zones. Analytiquement, il est difficile de prévoir la répercussion que cette imperfection peut avoir sur le

(1)

Les erreurs sont comprises entre 100 et 170 pcm dans le cas des réacteurs à une et deux zones.

(2)

Cette difficulté pourrait probablement être tournée en calculant l'argument des fonctions d'influence partant d'un canal en fonction des propriétés du modérateur qui entoure véritablement ce canal. Ce processus donne de bons résultats avec HECTOR lorsqu'on simule le réflecteur fini en entourant le réacteur d'une couronne de barres noires plongées dans un modérateur doté des propriétés du réflecteur réel.

(3)

Avec AUERBACH et CORNO (voir [8A]) on peut envisager de modifier à chaque itération les sections efficaces en fonction des résultats obtenus à la précédente itération (un gradient non nul en travers d'un barreau, un courant non nul traversant une maille pourraient traduire la distorsion du spectre en regard de la situation en réseau infini).

Réseau	Aire de migration radiale		Aire de migration axiale	
	COREGRAF	M2HET	COREGRAF	M2HET
1A1B28AL a = 1.385 c = 3.5 p = 192	656.00	630.35	689.58	702.57
1C1B50B a = 2.5 c = 3.5 p = 271.5	554.14	526.83	558.78	537.77
2D2B50B zone centrale a = 2.5 c = 4.5 p = 317	665.05	647.20	681.94	684.57
2D2B50B zone périphérique a = 2.5 p = 317	661.33	643.64	678.13	681.01
2D3B50B zone centrale a = 2.5 c = 5.5 p = 317	693.06	677.77	741.34	768.89
2D3B50B zone périphérique	689.20	674.05	737.38	764.84
2D4B50B zone centrale a = 2.5 c = 7.0 p = 317	770.51	755.30	914.39	993.88
2D4B50B zone périphérique	767.57	752.47	911.27	990.68
2D5B50B a = 2.5 c = 8.5 p = 317	902.39	881.92	1222.77	1374.07
1E4B50B a = 2.5 c = 7.00 p = 384	857.66	872.25	932.92	1083.54
1C1B31 a = 1.535 c = 3.5 p=271.5	797.11	781.61	816.21	827.27

a : rayon du barreau de combustible avec gaines (en cm)

c : " des canaux (en cm)

p : valeur du pas (en mm)

Tableau n° 6

Valeurs calculées des aires de migrations dans différents réseaux MARIUS.

calcul de la réactivité. Cependant les autres effets négligés⁽¹⁾ dans FODITH sont de moindre importance. Ce code conduit à des valeurs proches de la réactivité expérimentale dans les cas où il y a peu d'effets spectraux (réacteur à une ou deux zones larges). Il est donc naturel de penser que la responsabilité de l'écart (entre la réactivité calculée et la réactivité expérimentale), enregistré dans le cas du réacteur à trois zones, incombe à l'imperfection de ne pas pouvoir tenir compte des effets spectraux.

En tout état de cause, il apparaît que FODITH dipolaire ajusté peut permettre d'atteindre une valeur acceptable de la réactivité même lorsque l'utilisation des codes de diffusion et des codes sources-puits s'avère inopérante.

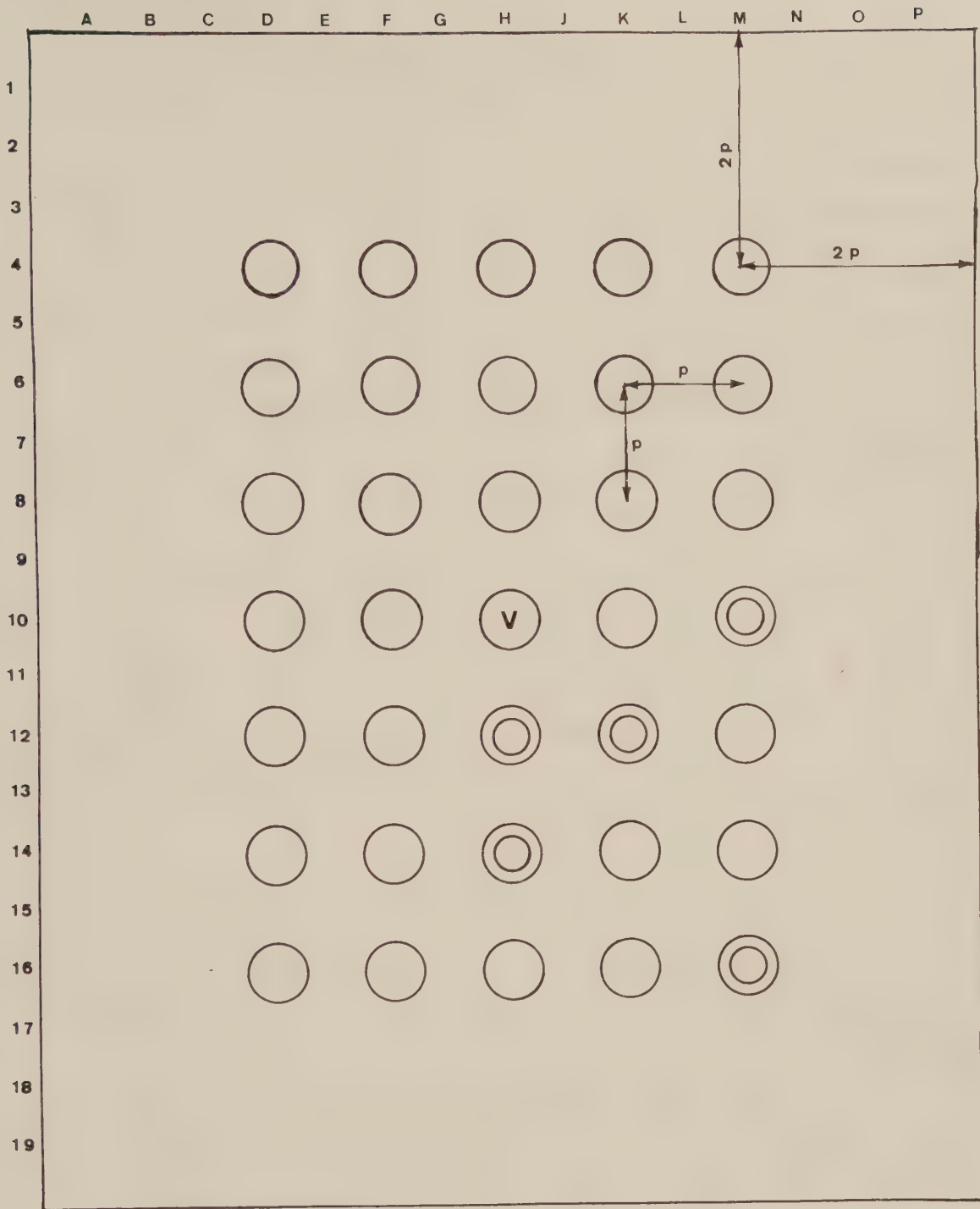
Seconde partie - Calcul du flux (en théorie à trois groupes)

A la suite d'un heureux concours de circonstances, l'aptitude de FODITH à calculer le flux dans un réacteur a été testée sur l'évaluation du gradient du flux thermique à travers les barreaux d'un réacteur A.G.R. (Advanced Gas Cooled Reactor). Les Anglais avaient constaté qu'entre les résultats de leurs calculs (exécutés à l'aide de SQUIFID, code hétérogène⁽²⁾ basé sur la méthode NORDHEIM-SCALETAR) et ceux de l'expérience, il pouvait exister un écart de plus de 50 %. Ayant appris que nous avions construit un code hétérogène dipolaire, de conception entièrement différente du leur, ils nous ont suggéré de reprendre ces calculs.

Les données relatives à un réacteur A.G.R., qui fut expérimenté aux Laboratoires Nucléaires de BERKELEY (Central Electricity Generating Board, England), nous ont été transmises par les soins de Mr. M.J. BRIDGE. Ce réacteur est constitué par un bloc de graphite de section rectangulaire au milieu duquel se trouve un réseau de cinq rangées de sept canaux, au pas carré de 40.386 cm (voir figure 2).

(1) On veut parler des effets des transitoires et des harmoniques d'ordre supérieur à un (voir formalisme).

(2) Le code SQUIFID a été construit par les Dr. D. BLACKBURN et C.W.J. Mc CALLIEN (cf. [31]) à partir d'un code de diffusion aux différences finies à deux dimensions. Aux noeuds des mailles des réseaux constituant le réacteur ont été introduites des sources polaires et dipolaires pour tenir compte des hétérogénéités représentées par les canaux. Ce code possède, par construction, d'excellentes performances.



$p = 40.386 \text{ cm}$



Canal vide



Canal chargé



Canal chargé où l'on calcule
le gradient du flux

Figure 2

Carte du réacteur A.G.R.
(Berkeley Nuclear Laboratories)

En dehors du canal central qui est vide, tous les canaux sont identiques et chargés d'une grappe de crayons d'uranium enrichi refroidis au gaz. Pour la simplification des calculs, la grappe est homogénéisée et remplacée par un barreau de même diamètre. Les caractéristiques, en théorie à trois groupes (calculées par le code de cellule ARGOSY) des canaux chargés sont rassemblées dans le tableau suivant :

Sections efficaces	Milieu	barreau			modérateur		
	groupe	1	2	3	1	2	3
Σ_c		.001295	.007082	.032997	.000002	0.	.000244
$\Sigma_{g \rightarrow g+1}$		.000452	.000591	0.	.009748	.007266	0.
$\nu \Sigma_f$		.001647	.001982	.047367	0.	0.	0.
Σ_s		.062963	.089108	.088064	.228028	0.3957818	0.4378087

Dans ce tableau Σ_c , Σ_f et Σ_s désignent, respectivement, les sections efficaces macroscopiques de capture (pure), de fission et de diffusion dans le groupe ; le symbole $\Sigma_{g \rightarrow g+1}$ représente la section efficace macroscopique de transfert, du groupe g au groupe $g+1$, d'énergie immédiatement inférieure⁽¹⁾.

La quantité ν est le nombre moyen de neutrons rapides libérés par une fission.

Aux caractéristiques neutroniques il convient d'adjoindre les caractéristiques géométriques :

⁽¹⁾ Implicitement, les sections de transfert (par "scattering") du groupe g vers les groupes d'indice différent de g et $g+1$ sont nulles.

le rayon de tous les canaux (y compris le canal vide) vaut 8.89 cm, celui du barreau 8.189 cm, la hauteur extrapolée du réacteur est de 415.38 cm.

BRIDGE nous désigna l'emplacement des canaux où les mesures avaient été faites et nous en fournit les résultats. Il y ajouta ceux du calcul SQUIFID. On peut classer les résultats en deux groupes. Les uns concernent la structure macroscopique du flux dans le réacteur, les autres la structure fine du flux à l'intérieur des mailles du réseau. Les premiers donnent la valeur moyenne du flux thermique⁽¹⁾ autour des barreaux de tous les canaux, les seconds la valeur du rapport $\frac{\text{MAX} - \text{MIN}}{\text{MOY}}$ du même flux autour du barreau de certains canaux.

On montre, en annexe U, que ce rapport peut être calculé par la formule :

$$\frac{\text{MAX} - \text{MIN}}{\text{MOY}} = \frac{2 \pi a^3 \Sigma_{au}}{G' \left(1 - \frac{S}{i} \left(1 - \frac{1}{G'}\right)\right)} \frac{\nabla \phi}{i}$$

dans laquelle, on désigne par :

a et Σ_{au} le rayon et la section efficace d'absorption thermique du barreau ;

$\nabla \phi$ le gradient du flux thermique à travers le barreau⁽²⁾ ($\nabla \phi = \sqrt{\nabla \phi_x^2 + \nabla \phi_y^2}$) ;

i le taux d'absorption thermique⁽²⁾ ;

(1) En fait, les résultats expérimentaux ont été obtenus à l'aide de détecteurs au manganèse. Les résultats des calculs doivent en conséquence être corrigés ; la courbe, en fonction de la vitesse, de la section efficace d'absorption du manganèse n'est pas purement en $1/v$, mais comporte une petite résonance épithermique. Il ressort de certains calculs de BRIDGE que la correction sur la valeur du rapport $\frac{\text{MAX-MIN}}{\text{MOY}}$ ne saurait toutefois excéder quelques pour cent. Cette correction n'a pu être appliquée aux résultats FODITH car nous ne connaissions pas la formule utilisée par BRIDGE, au moment où nous avons fait les calculs.

(2) La composante x (resp. y) de ce gradient est calculée dans FODITH en pondérant le flux par x (resp. y) dans la section droite V_u du barreau :

$$\nabla \phi_x = \frac{\int_{V_u} \phi x dV}{\frac{\pi a^4}{4}} \qquad \nabla \phi_y = \frac{\int_{V_u} \phi y dV}{\frac{\pi a^4}{4}}$$

Suite page suivante

S la source (intégrée dans le volume du barreau) formée par les neutrons entrant dans le groupe thermique à la suite d'un choc dans le combustible ;

G' la quantité qui intervient dans le calcul ABH [10] de f et qui représente, dans le groupe thermique (à condition d'admettre l'hypothèse de semi-isotropie du flux à la frontière du canal⁽¹⁾), le rapport (noté habituellement G) des valeurs moyennes du flux respectivement à la périphérie et dans le volume du barreau, en l'absence de source S.

suite du renvoi ⁽²⁾ de la page précédente.

Compte tenu de (III.D.1.34), on a, pour le barreau inclus dans le canal indicé k :

$$\nabla \phi_x = \frac{1}{\Sigma_{au}} \sum_{1 \leq g' \leq NG} \left[r_{uk}^1(g' \rightarrow NG) \nabla \psi_{ok_x}^{g',g'}(\vec{r}_k) + t_{uk}^1(g' \rightarrow NG) V_{kx}(g',g') \right]$$

$$\nabla \phi_y = \frac{1}{\Sigma_{au}} \sum_{1 \leq g' \leq NG} \left[r_{uk}^1(g' \rightarrow NG) \nabla \psi_{ok_y}^{g',g'}(\vec{r}_k) + t_{uk}^1(g' \rightarrow NG) V_{ky}(g',g') \right]$$

Parallèlement, le taux d'absorption i_k^g dans le groupe g du même barreau, est calculé dans FODITH, par la formule (voir (III.D.1.15)) :

$$i_k^g = \int_{V_u} \Sigma_{auk}^g \phi^g dV = V_u \sum_{1 \leq g' \leq NG} \left[r_{uk}^o(g' \rightarrow g) \psi_{ok}^{g',g'} + t_{uk}^o(g' \rightarrow g) N_k(g',g') \right]$$

$$\text{avec} \quad \Sigma_{auk}^g = \Sigma_{ouk}^g + \sum_{g < g' \leq NG} T_{uk}(g \rightarrow g')$$

où Σ_{ouk}^g est la section efficace macroscopique de capture, au niveau du groupe g , du barreau inclus dans le canal k .

⁽¹⁾ Cela peut entraîner une erreur de plus de 5 % ($G > G'$) sur la valeur de MOY lorsque le produit $a \Sigma_{au}$ dépasse 0.40. Ce n'est pas le cas ici puisque $a \Sigma_{au}$ est de l'ordre de 0.25.

On montre également, en annexe U, que la valeur moyenne (MOY) du flux thermique à la périphérie du barreau a pour expression :

$$MOY = \frac{G' \cdot 1}{\Sigma_{au} \pi a^2} \left(1 - \frac{S}{1} \left(1 - \frac{1}{G'}\right)\right)$$

On a (cf. [10]) :

$$G' = \frac{1}{\mathcal{P}} - a \Sigma_{au}$$

où $\mathcal{P}$ représente la probabilité de sortie du barreau.

Dans le cas présent, G' vaut 1.1356 et $\frac{2\pi a^3 \Sigma_{au}}{G'} = 100.258$. On n'a pas tenu compte des fuites axiales pour calculer G' . Mais il est facile de voir que les fuites axiales contribuant à augmenter la capture apparente du barreau, l'erreur commise sur la valeur de G' doit être assez faible, car $1/\mathcal{P}$ augmente avec la capture.

La source S a pour intensité $\frac{\Sigma_{u2 \rightarrow 3}}{\Sigma_{uc}^2 + \Sigma_{u2 \rightarrow 3}}$ fois le taux d'absorption épithermique (u étant l'indice du combustible).

Par la suite, BRIDGE complète, ce premier ensemble de résultats en nous faisant parvenir les valeurs obtenues par HET (code hétérogène⁽¹⁾ de supercellule, voir [31]) des différents rapports $\frac{MAX - MIN}{MOY}$.

Le problème, pour les Anglais, ne résidait pas dans la vérification du premier groupe de résultats expérimentaux (structure macroscopique). Les calculs SQUIFID leur donnent, à cet égard, entière satisfaction. S'ils nous ont suggéré de reprendre cette vérification avec FODITH, c'est simplement pour s'assurer que FODITH est au moins aussi valable que SQUIFID. L'examen du tableau n° 7 nous tranquillise à ce sujet⁽²⁾. La difficulté provenait

⁽¹⁾ Ce code utilise les coefficients dipolaires formulés dans [32].

⁽²⁾ Les canaux sont représentés par la réunion d'une lettre et d'un nombre. La lettre désigne la rangée du réseau dans laquelle se trouve le canal et le nombre sa position dans la rangée.

de ce que SQUIFID ne permet pas, actuellement, d'approcher de manière satisfaisante les résultats expérimentaux du second groupe (erreurs vis-à-vis de l'expérience allant de 4 à 76 %). FODITH apporte (voir tableau⁽¹⁾ n° 8) en la matière d'assez grosses améliorations (erreurs vis-à-vis de l'expérience allant de 2 à 27 %). Cependant, on ne peut pas considérer que ses résultats soient encore entièrement satisfaisants. En effet, près du canal vide en H 12 et K 12, et du réflecteur, en M 10, on constate des écarts par rapport à l'expérience de 10 à 27 %. Ces écarts sont probablement dus à des effets de spectre. Le spectre au voisinage du canal vide et le spectre au voisinage du réflecteur diffèrent du spectre qui existe en réseau infini. Et malheureusement, comme il a été dit dans la première partie de cette section, il n'existe pas dans FODITH d'option qui permette de corriger la valeur des paramètres en fonction des changements du spectre. Pour les canaux proches du canal vide et les canaux proches du réflecteur, il aurait fallu utiliser des sections efficaces différentes de celles que BRIDGE nous a fait parvenir.

En fait, le seul résultat FODITH qui soit situé en dehors de la plage d'incertitude expérimentale⁽¹⁾ est le résultat correspondant au canal H 12 (le plus proche du canal vide). En effet, l'imprécision sur la mesure du flux est de l'ordre de 1 %. Un rapide calcul d'erreur⁽²⁾ montre que cela entraîne sur la valeur "expérimentale" du rapport $\frac{\text{MAX} - \text{MIN}}{\text{MOY}}$ une incertitude

(1) à seulement - 7 % du bord inférieur de cette plage.

(2) Soient x et y le maximum et le minimum, mesurés à 1 % près, du flux autour de la grappe. L'incertitude (relative) sur la valeur de $\frac{x + y}{2}$ est évidemment de 1 % et celle (absolue) sur la valeur de $x - y$ de $0.01 (x + y)$. L'erreur relative maximum qu'on peut commettre en évaluant $\frac{\text{MAX} - \text{MIN}}{\text{MOY}}$ est donnée par la formule :

$$\frac{\Delta \left(\frac{x - y}{\frac{x + y}{2}} \right)}{\frac{x - y}{\frac{x + y}{2}}} = \frac{\Delta(x - y)}{x - y} + \frac{\Delta \left(\frac{x + y}{2} \right)}{\frac{x + y}{2}}$$

Compte tenu des incertitudes annoncées, elle conduit à l'égalité :

Tableau n° 7

Canal	FLUX MOYENS A LA SURFACE DES BARREAUX		
	Résultats		
	SQUIFID	FODITH ⁽¹⁾	EXPERIENCE
H 10	-	-	-
H 12	1407	1413	1415
H 14	1194	1190	1185
H 16	871	879	872
K 10	1352	1362	1371
K 12	1275	1276	1265
K 14	1096	1094	1094
K 16	796	805	802
M 10	1026	1035	1025
M 12	980	988	980
M 14	831	841	836
M 16	598	612	589

(1) Résultats normalisés sur la valeur expérimentale trouvée pour K 14.

Tableau n° 8 - Comparaison avec l'expérience - Variation du flux à la frontière de la grappe dans un réacteur AGR.

Canal	FODITH		EXP	$\frac{FODITH}{EXP}$	$\frac{SQUIFID}{EXP}$	$\frac{HET}{EXP}$
	$\frac{\nabla \phi}{i}$	$\frac{MAX - MIN}{MOY}$				
H 12	0.0668	0.0672	0.092	0.730	1.130	0.51
K 12	0.0696	0.0699	0.078	0.896	1.038	0.70
M 10	0.1057	0.1061	0.090	1.179	1.756	1.00
H 14	0.0780	0.0783	0.076	1.030	1.408	0.81
M 16	0.1732	0.1739	0.170	1.023	1.600	0.85

absolue de ± 0.02 , ce qui équivaut en moyenne, étant donné l'ordre de grandeur de ce rapport, à une incertitude relative de 20 %. L'imprécision⁽¹⁾ des calculs FODITH, compte tenu des formules utilisées (voir renvoi (2) de la page 169) pour obtenir le taux d'absorption et le gradient du flux à travers le barreau, ne dépasse pas 2 % : les paramètres hétérogènes sont calculés avec une précision de 1 ‰ (voir [13]) et on a exigé que les valeurs des composantes polaires et dipolaires du flux, dans la recherche itérative de la solution critique, soient atteintes à 5 ‰ près.

On peut donc conclure que FODITH est capable de donner un aperçu assez significatif de la structure fine du flux dans un réacteur comportant des irrégularités.

Remarque I

Ces considérations sur la marge d'incertitude expérimentale nous montrent la grande sensibilité du rapport $\frac{\text{MAX} - \text{MIN}}{\text{MOY}}$ à toutes les causes pouvant entraîner une fluctuation du flux. Cela explique pourquoi les effets de spectre ont une influence aussi marquée sur les valeurs de ce rapport et pratiquement aucune sur la structure macroscopique du flux.

Remarque II

Les résultats donnés par HET se situent dans le domaine d'erreurs - vis-à-vis de l'expérience - intermédiaire (0 à 50 %) entre ceux de SQUIFID et ceux de FODITH. On en compte deux hors de la plage d'incertitude expérimentale (et trois parmi ceux de SQUIFID).

Suite de ⁽²⁾ de la page 172.

$$\Delta \left(\frac{\frac{x-y}{x+y}}{2} \right) = \frac{0.01 (x+y)}{\frac{x-y}{x+y}} + 0.01$$

En multipliant de part et d'autre par $\frac{x-y}{\frac{x+y}{2}}$, il vient :

$$\Delta \left(\frac{x-y}{\frac{x+y}{2}} \right) = 0.02 + 0.01 \frac{x-y}{\frac{x+y}{2}}$$

Dans le second terme, le deuxième membre est évidemment négligeable devant le premier terme.

⁽¹⁾ Si l'on excepte la correction, n'excédant pas quelques pour cent, qui doit être faite pour tenir compte de la résonance du manganèse (voir renvoi (1) page 169).

Section C

ORDRE DE GRANDEUR DE LA CORRECTION A APPORTER A LA FORMULE USUELLE DU COEFFICIENT DE DIFFUSION DE BENOIST DANS LE GROUPE THERMIQUE

Cette section est consacrée à l'étude numérique de la correction qu'il faut appliquer à la formule usuelle du coefficient de diffusion de BENOIST, dans le groupe thermique, pour tenir compte de la non-uniformité et de la non isotropie du flux de structure fine d'ordre zéro dans chacun des milieux de la cellule. L'expression de cette correction s'obtient en retranchant de la formule (IV.D.16), du chapitre IV du présent mémoire, la formule pratique⁽¹⁾ figurant à la page 161 de la thèse de BENOIST [12].

La formule théorique du coefficient de diffusion de BENOIST (formule A.15 de [12]) se compose de deux termes :

$$\frac{D_{ox}}{\frac{1}{3} \lambda_m} = \frac{\int_{V_{cel}} j_{1xx} dV}{\frac{1}{3} \lambda_m \int_{V_{cel}} \phi_o dV} + \frac{\int_{V_{cel}} x \operatorname{div} \vec{j}_{1x} dV}{\frac{1}{3} \lambda_m \int_{V_{cel}} \phi_o dV}$$

(Les notations employées sont celles du chapitre IV de cette thèse).

La formule pratique proposée par BENOIST ne concerne que le premier terme de la formule théorique et s'obtient en faisant l'approximation d'isotropie et d'uniformité du flux d'ordre zéro dans chacun des milieux de la cellule. Il convient de rappeler que lorsque l'on représente le coefficient de diffusion par ce terme, on admet la "loi de diffusion selon le carré-moyen" (cf. [12] page 13).

⁽¹⁾ Cette formule est programmée dans les codes de cellule tels que WIMS et COREGRAF.

Nous étudierons d'abord le cas particulier où, bien que le flux d'ordre zéro ne soit plat ni isotrope, la formule pratique de BENOIST donne un résultat rigoureusement égal à la valeur du premier terme de la formule théorique. Il suffit que la section efficace macroscopique totale soit la même dans chacun des milieux de la cellule et que le choc soit isotrope (voir Annexe V). Le premier terme est alors égal à l'unité. Ce cas particulier présente de l'intérêt car le terme correctif étudié se confond alors avec le second terme de la formule théorique. C'est un moyen de se rendre compte de combien on peut s'écarter en milieu hétérogène de la loi de diffusion selon le carré moyen.

La cellule considérée se compose de deux milieux cylindriques coaxiaux de même section efficace totale. Le milieu extérieur (modérateur) est une couronne de graphite de section efficace de capture :

$$\Sigma_{am} = 0.00023,$$

et de section efficace totale :

$$\Sigma_t = 0.42917.$$

Le milieu intérieur s'apparente à un barreau de combustible dont la section efficace de capture Σ_{au} prend successivement les valeurs :

$$0.00023 (\Sigma_{am}), \quad 0.1, \quad 0.2, \quad 0.3 \text{ et } 0.42917 (\Sigma_t)$$

Le choc est supposé isotrope dans chacun des milieux. On a envisagé trois rayons possibles pour la cellule :

$$12, 18 \text{ et } 24 \text{ cm}$$

et quatre valeurs pour le rapport du volume du combustible V_u au volume du modérateur V_m :

$$1 - \left(\frac{1.5}{12}\right)^2, \quad 1 - \left(\frac{2.5}{12}\right)^2, \quad 1 - \left(\frac{3.5}{12}\right)^2 \text{ et } 1 - \left(\frac{4.5}{12}\right)^2$$

Les résultats du calcul de la formule (IV.D.16) exécuté par PODIC ont été inscrits sur la première ligne de chaque case du tableau n° 9. Leur examen montre que la correction à la loi de diffusion selon le carré moyen prend de l'importance au fur et à mesure que Σ_{au} et V_u augmentent. Elle est négative et paraît atteindre une valeur de saturation de - 17 % pour les grandes valeurs de $V_u \times \Sigma_{au}$. Cette correction peut théoriquement être divisée en deux parties. En effet, l'intégration sur l'angle solide (4π) de l'équation (IV.A.5) conduit à la relation de conservation :

$$\text{div } \vec{j}_{1x} + \Sigma_a \phi_{1x} = j_{0x}$$

où j_{0x} est la composante x du courant $\vec{j}_0 = \left(\int_{(4\pi)} v_0 \vec{\Omega} d\Omega \right)$ associé au flux fin d'ordre zéro.

Par suite, le second terme de la formule A.15 de [12] s'écrit :

$$\frac{\int_{V_{cel}} x \text{ div } \vec{j}_{1x} dV}{\frac{1}{3} \lambda_m \int_{V_{cel}} \phi_0 dV} = \frac{\int_{V_{cel}} x j_{0x} dV}{\frac{1}{3} \lambda_m \int_{V_{cel}} \phi_0 dV} + \frac{- \int_{V_{cel}} x \Sigma_a \phi_{1x} dV}{\frac{1}{3} \lambda_m \int_{V_{cel}} \phi_0 dV}$$

La seconde partie du second membre de cette relation est appelée par BENOIST correction d'absorption (cf [12] page 62). La première partie n'apparaît pas dans le traitement de BENOIST car l'hypothèse d'isotropie de v_0 entraîne l'annulation de $\vec{j}_0$. Nous l'appellerons correction d'anisotropie de source. Sa valeur est calculée par PODIC à l'aide d'une formule établie en utilisant (voir annexe X) une représentation parabolique du flux (scalaire) d'ordre zéro, dans le barreau, du type proposé par BENOIST dans [12] (Annexe IX). Elle figure, entre parenthèses, sous la valeur correspondante de la formule (IV.D.16) dans le tableau n° 9.

On constate qu'elle est toujours négative et (jusqu'à deux fois) plus forte que la correction à la loi de diffusion selon le carré moyen. Cela signifie que la correction d'absorption est positive et peut égaler, en valeur absolue, la correction globale. L'hypothèse d'isotropie et

d'uniformité du flux d'ordre zéro a permis à BENOIST (cf. [12] page 65) de prévoir le signe, mais pas l'ordre de grandeur, de la correction d'absorption. On a inclus dans PODIC le calcul, selon les conventions de BENOIST, de la formule du coefficient de diffusion avec correction d'absorption (formule (IV.D.17) du présent mémoire). Les résultats obtenus ont été portés sur la dernière ligne de chaque case du tableau n° 9. On peut vérifier qu'ils n'excèdent l'unité que d'environ la moitié de la valeur de la correction d'absorption obtenue sans faire appel aux conventions de BENOIST.

Ces résultats nous montrent que la loi de diffusion selon le carré moyen est insuffisante pour calculer les fuites thermiques d'une cellule hétérogène et ce d'autant plus que la capture du combustible est plus grande. Cette loi étant par contre exacte en milieu homogène, il en résulte qu'on ne peut avoir à la fois égalité des fuites et égalité des carrés moyens dans deux cellules, l'une homogène et l'autre hétérogène.

Dans le cas plus général où la section efficace totale n'est pas la même dans tous les milieux de la cellule, la formule pratique du coefficient de diffusion de BENOIST ne donne pas un résultat égal à la valeur du premier terme de la formule théorique sauf si le canal est vide. Dans ce cas particulier, le flux d'ordre zéro est uniforme et isotrope dans toute la cellule. La correction d'anisotropie de source est nulle et la correction d'absorption négligeable car la capture du modérateur est faible. L'écart entre le résultat de la formule (IV.D.16) et celui de la formule pratique du coefficient de diffusion est alors très petit. Il est encore petit quand la situation est proche du canal vide, lorsque par exemple le volume occupé par le combustible dans le canal (vis-à-vis de la cavité) est réduit ou lorsque la section efficace d'absorption du combustible est faible. C'est ce qui ressort de l'analyse comparative (voir tableau n° 10) des résultats respectivement obtenus par COREGRAF et PODIC pour les réseaux A, B, C et D (considérés dans la section A du présent chapitre) qui ne diffèrent que par la dimension des cavités.

Type du réseau envisagé $D/\frac{1}{3} \lambda_m$	A (c = 8.5)	B (c = 5.5)	C (c = 3.5)	D (c = 2.51)	Commentaires
COREGRAF	1.4155	1.1035	1.0115	0.9948	Dans COREGRAF on utilise les densités moyennes et non les flux moyens pour calculer la formule usuelle de [12]. On applique en outre les corrections de distribution angulaire et de non-uniformité.
PODIC forme usuelle sans corr. d'absorption	1.3974	1.1052	1.0151	0.99399	
PODIC forme usuelle avec corr. d'absorption	1.3997	1.1073	1.0174	0.99645	
PODIC* : formule (IV.D.16) représentant la formule théorique complète sans hypothèse d'isotropie et d'uniformité du flux fin d'ordre zéro	1.3955	1.0488	0.94257	0.91996	
Valeur de la correction PODIC* COREGRAF - 1 en pourcentage	- 1.41 %	- 4.96 %	- 6.81 %	- 7.52 %	

Tableau n° 10 - Variation du coefficient de diffusion en fonction du rayon c du canal

b = 17.87262 cm
a = 2.5 cm

Cela ressort également de l'étude de la variation, en fonction de la section efficace d'absorption du combustible, de la différence entre la valeur de la formule (IV.D.16) et celle de la formule⁽¹⁾ (IV.D.17) calculées par PODIC (voir tableau n° 11).

Mais plus on s'éloigne de la situation du canal vide, plus l'effet correctif négatif dû à la capture du combustible devient important. On peut constater que l'intensité de cet effet est peu sensible aux variations du rayon de cellule (voir tableau n° 12) et à celles de la section de diffusion du combustible (à Σ_{au} constant, voir tableau n° 13).

A titre indicatif, on a rassemblé dans le tableau n° 14 les valeurs du coefficient de diffusion calculées par PODIC, selon les différentes options, pour des réseaux non académiques du type MARIUS, EDF et AGR.

En conclusion, on peut dire que la correction à apporter à la formule usuelle du coefficient de diffusion dans le groupe thermique est généralement négative et d'autant plus importante qu'on est éloigné de la situation du canal vide.

NOTA : Le code PODIC met environ une seconde et demie pour calculer le coefficient de diffusion. Il occupe en mémoire 121 K de l'IBM 360/91.

⁽¹⁾ sans la correction d'absorption (voir Annexe N).

Tableau n° 11

Variation du coefficient de diffusion thermique en fonction de la section d'absorption du barreau

La cellule considérée comprend trois milieux coaxiaux : une couronne de graphite, une cavité et un barreau de combustible.

Caractéristiques du modérateur { rayon externe b = 17.87262 cm
rayon interne c = 4.5 cm
 $\Sigma_{tm} = 0.4054563 \text{ cm}^{-1}$ $\Sigma_{am} = 0.2563 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$
 $\Sigma_{sm} = 0.40520 \text{ cm}^{-1}$

Caractéristiques de la cavité rayon interne a = 2.5 , rayon externe c = 4.5

Caractéristiques du barreau { rayon a = 2.5
 $\Sigma_{su} = 0.395944 \text{ cm}^{-1}$

Σ_{au} en cm^{-1}	$\Sigma_{tu} = \Sigma_{su} + \Sigma_{au}$ en cm^{-1}	$D_r / \frac{1}{3} \lambda_m$	
		formule usuelle	formule (IV.D.16)
0.001	0.396944	1.067	1.066
0.010	0.405944	1.066	1.058
0.050	0.445944	1.061	1.029
0.100	0.495944	1.058	1.005
0.206924	0.602868	1.054	0.975

Tableau n° 12

Variation du coefficient de diffusion thermique en fonction du rayon de cellule

La cellule considérée comprend trois milieux coaxiaux : une couronne de graphite, une cavité et un barreau de combustible.

Caractéristiques du modérateur	rayon externe b variable rayon interne c = 4,5 cm $\Sigma_{tm} = 0.4054563 \text{ cm}^{-1}$ $\Sigma_{sm} = 0.40520 \text{ cm}^{-1}$ $\Sigma_{am} = 0.2563 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$
Caractéristiques de la cavité	rayon externe c = 4.5 cm, rayon interne a = 2.5cm
Caractéristiques du barreau	rayon a = 2.5 cm $\Sigma_{tu} = 0.602866 \text{ cm}^{-1}$ $\Sigma_{su} = 0.395944 \text{ cm}^{-1}$ $\Sigma_{au} = 0.206924 \text{ cm}^{-1}$

b	$D_r / \frac{1}{3} \lambda_m$	
	formule usuelle	formule (IV.D.16)
17.97262	1.054	0.975
16.	1.069	0.989
14.	1.091	1.011
12.	1.129	1.047

Tableau n° 13

Variation du coefficient de diffusion thermique en fonction de la section de diffusion du combustible

La cellule considérée comprend trois milieux coaxiaux : une couronne de graphite, une cavité et un barreau de combustible.

- Caractéristiques du modérateur {
rayon externe b = 12 cm
rayon interne c = 4.5 cm
 $\Sigma_{tm} = 0.4054563 \text{ cm}^{-1}$
 $\Sigma_{sm} = 0.40520 \text{ cm}^{-1}$
 $\Sigma_{am} = 0.2563.10^{-3} \text{ cm}^{-1}$
- Caractéristiques de la cavité rayon externe c = 4.5cm, rayon interne a = 2.5cm
- Caractéristiques du barreau {
rayon a = 2.5 cm
 $\Sigma_{au} = 0.206924$

Σ_{su}	$\Sigma_{tu} = \Sigma_{su} + \Sigma_{au}$	$D_r / \frac{1}{3} \lambda_m$	
		formule usuelle	formule (IV.D.16)
0.800	1.006924	1.110	1.029
0.600	0.806924	1.118	1.036
0.395944	0.602868	1.129	1.047
0.200	0.406924	1.146	1.064
0.050	0.256924	1.166	1.086

Tableau n° 14

Correction à apporter à la valeur connue du coefficient de diffusion thermique de différents réseaux multiplicateurs

Type du réseau considéré $D_r \frac{1}{3} \lambda_m$	a = 2.50 cm				BUGEY 1	ST LAURENT 11/12	Réseau AGR BNL où l'on a calculé le flux
	D5B50B c = 8.5 cm	D4B50B (zone centrale) c = 7.0 cm	D3B50B (zone centrale) c = 5.5 cm	D2B50B (zone centrale) c = 4.5 cm			
COREGRAF	1.3979	1.2168	1.0958	1.0422	1.204	1.307	-
PODIC forme usuelle sans correct. d'absorpt.	1.3978	1.2227	1.1055	1.0520	1.1878	1.3031	1.1583
PODIC forme usuelle avec correct. d'absorpt.	1.4001	1.2247	1.1075	1.0541	1.1860	1.3042	1.1451
PODIC* : formule (IV.D.16) représentant la formule théorique complète calculée sans hypothèse d'isotropie et d'uniformité du flux fin d'ordre zéro	1.3923	1.1863	1.0484	0.98572	1.1116	1.3519	1.0365
Valeur de la correction : $\frac{PODIC^*}{COREGRAF} - 1$ en pourcentage	- 0.4 %	- 2.5 %	- 4.3 %	- 5.4 %	- 7.7 %	+ 3.4 %	(1) - 10.5 %

(1) La correction est rapportée à la valeur de la formule usuelle sans correction d'absorption.

CHAPITRE VII - CONCLUSION

On a construit une nouvelle formulation hétérogène en partant de l'idée (contenue dans la théorie sources-puits de FEINBERG-GALANINE [1] et [2]) qui consiste à séparer l'action des canaux. On a montré, en utilisant un théorème établi en théorie du transport que chaque canal pouvait être caractérisé par des paramètres calculables en "cellule ouverte" (expression employée par ALPIAR dans [8C] pour désigner la géométrie obtenue en entourant le canal par du modérateur jusqu'à l'infini). On a obtenu l'expression de ces paramètres en utilisant la théorie du transport dans le canal et la théorie asymptotique dans le modérateur (ALPIAR calcule les paramètres en utilisant la théorie P3 dans le canal). De ce fait, la nouvelle formulation hétérogène est une généralisation, au calcul des réacteurs, de la théorie ABH [10] initialement développée pour le calcul de cellule. La programmation de cette formulation sur la machine IBM 360/91 a donné naissance au code dipolaire FODITH. L'application de ce code au calcul de la réactivité et du flux dans un réacteur comportant d'étroites irrégularités a permis d'atteindre des résultats voisins de ceux de l'expérience. Un effort reste cependant à faire pour mieux tenir compte des variations des sections efficaces en fonction de l'environnement. Au prix d'approximations entraînant des erreurs très minimes sur les valeurs du flux et de la réactivité, il doit être possible d'améliorer les performances de FODITH, au point de le rendre aussi rapide et aussi peu encombrant qu'un code de diffusion (aux différences finies) à deux dimensions.

On a montré qu'en faisant l'approximation d'isotropie et d'uniformité du flux d'ordre zéro dans chacun des milieux de la cellule, on peut surestimer le coefficient de diffusion thermique de 5 à 17 %, sauf si la situation est proche de celle du canal vide (faible section efficace d'absorption du combustible ou volume du combustible petit vis-à-vis de celui occupé par la cavité).

REFERENCES

- [1] FEINBERG S.M. - Méthodes hétérogènes de calcul des piles atomiques : aperçu des résultats et comparaison avec l'expérience
Rapport P/669 présenté à la Conférence de Genève de 1955.
- [2] GALANINE A.D. - Le coefficient d'utilisation thermique dans une pile hétérogène
Rapport P/666 Conf. de Genève 1955.
- [3] SCALETTAR R. et NORDHEIM L.W. - Theory of Pile Control Rods
MDDC 42 - Clinton Laboratories - Juin 1946.
- [4] BOIVINEAU A. et CHABRILLAC M. - Le code HECTOR
Note CEA n° 523 - Janvier 1965.
- REUSS P. - Etude préliminaire de la méthode hétérogène de calcul de piles en vue de l'interprétation des expériences de remplacement progressif
Rapport SPM n° 850 - Février 1965.
- [5] CHABRILLAC M. - Etude d'une méthode hétérogène de calcul de piles : ASTVANAX
Note SPM n° 375 - Octobre 1965.
- CHABRILLAC M. - Projet de spécification pour ASTVANAX et TRICYCLE III
Note SPM n° 432 - Mai 1966.
- [6] GALANINE A.D. et KOTCHUROV B.P. - The Theory of Heterogeneous Reactors with Slugs of Finite Radius
Atomnaya Energiya - Vol. 15 n° 2 pp. 107-115 - August 1963.
- [7] REUSS P. - PODIPO : Code hétérogène polaire et dipolaire
Rapport SPM n° 1061 - Décembre 1968.

- [8A] AUERBACH T. - *Two-Dimensional Multigroup Theory with One Thermal Group and Flux-Independent Cross-Sections*
EIR - Bericht n° 100 - Juin 1967.
- [8B] AUERBACH T. - *A Consistent Heterogeneous Theory of Reflected Lattices*
N.S.E. Vol. 29 n° 3, 317-324 - Septembre 1967.
- [8C] ALPIAR R. - *Heterogeneous Reactor Lattice Programmes Using the "Open Cell" Technique*
EIR Bericht n° 160 - Août 1969.
- [9] MASTRANGELO V. - *Interprétation des expériences exponentielles et critiques à l'aide d'un modèle hétérogène*
Rapport EUR - 4128, f, Juillet 1968
Thèse de Docteur-Ingénieur présentée à la Faculté des Sciences de Lyon.
- [10] AMOUYAL A. et BENOIST P. - *Nouvelle méthode de détermination du facteur d'utilisation thermique*
Rapport CEA n° 571 - 1956.

AMOUYAL A., BENOIST P., HOROWITZ J. - Même titre
J. Nuclear Energy, 6, 79 - 1957.
- [11] BERNA Ph. - *Recherche d'une définition cohérente du coefficient de diffusion*
Rapport SPM n° 1123 - Avril 1970.
- [12] BENOIST P. - *Théorie du coefficient de diffusion des neutrons dans un réseau comportant des cavités*
(Thèse de Doctorat ès Sciences) - Rapport CEA-R 2278, Saclay, 1964.
- [13] BERNA Ph. et PILLARD D. - *Description du code FODITH - SPM 213 - Version Juillet 1969*
Rapport SPM n° 1158 - Février 1971.
- [14] CASE K.M., DE HOFFMANN F., PLACZECK G. - *Introduction to the Theory of Neutron Diffusion*
Vol. I - USAEC - LASL - Juin 1953.

- [15] BENOIST P. - *Cours de Troisième Cycle 2ème année - Première Partie - Théorie du Transport - Chapitre II.*
Rapport SPM n° 1119 - Avril 1970.
- [16A] WATSON G.N. - *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*
Cambridge University Press - 1962.
- [16B] PETIAU G. - *La théorie des fonctions de Bessel exposée en vue de ses applications à la physique mathématique*
CNRS - 1955.
- [17] BICKLEY W.G., NAYLER J. - *A Short Table of the Functions $K_i n(x)$ from $n = 1$ to $n = 16$*
Phil. Mag. 20, Series 7, 343 - 1935.
- [18] LIVOLANT M. - *Méthodes itératives simples pour la résolution de problèmes linéaires*
Note SPM 706 - Novembre 1968.
- [19] GANTMACHER F.R. - *Théorie des matrices*
Dunod - Paris - 1966.
- [20] REUSS P. - *Les neutrons non thermiques dans un réacteur à graphite et à uranium naturel*
Rapport SPM n° 1002 - Mars 1968.
- [21] BENOIST P., BERNA Ph. - *Effets créés par l'application d'un gradient de flux constant sur un canal cylindrique chargé entouré par un modérateur infini de propriétés uniformes*
Note SPM n° 503 - Mars 1967.
- [22] BLACKBURN D. - *Communication personnelle* - Février 1970.
- [23] BENOIST P. - *La collision anisotrope dans les problèmes de cellule*
Rapport CEA-R 2890 - 1967
ou *Anisotropic Scattering in Cell Problems*
NSE 30, 85-94, 1967.

- [24] BRUN A.M., KAVENOKY A. - *Traitement par probabilités de collisions du choc linéairement anisotrope*
Rapport SPM n° 1068 - Avril 1969.
- [25] KUSHNERIUK et C. Mc KAY - *Neutron Density in an Infinite Non-capturing Medium Surrounding a Long Cylindrical Body which Scatters and Captures Neutrons*
Rapport AECL 137 - Chalk River 1954.
- [26] DAVISON B. - *Influence of a Cylindrical Channel on a Periodic Neutron Density Distribution*
A.E.R.E. T/R 738 - Harwell 1951.
- [27] CHARBONNEAU S. - *Communication personnelle* - 1969.
- [28] HOFFMANN A. - *Communication personnelle*
Commentaires sur le formalisme de COREGRAF - 1970.
- [29] COGNÉ F., HOFFMANN A., REUSS P. - *COREGRAF 2 - Code de calculs de réseaux et d'évolution des réseaux à graphite - Code SPM sur IBM 360 et CDC 6600*
Rapport CEA-N 1344 (1) - Décembre 1970.
- [30] BOSSET R. et LANGLET G. - *Compte-rendu d'expériences sur MARTUS II - Réseau B 50, Pas 316,78, à diamètre variable (ϕ 90, 110, 140, 170)*
Rapport SECMG n° 144 - CEN Cadarache - Juillet 1966 - Juillet 1967.
- [31] BLACKBURN D., SHERWIN J. and TYROR J.G. - *Reactor calculations for A.G.R. J. British Nucl. Energy Soc. - Vol. 6 n° 2 p. 144* - 1967.
- BLACKBURN D. - *Heterogeneous Method for Advanced Gas Cooled Reactors*
AD HOC SPECIALIST MEETING ON THE APPLICATION OF HETEROGENEOUS METHODS TO BURN UP CALCULATION - Saclay - 16th - 18th January 1967.
- Mc CALLIEN C.W.J. - *SQUIFID : A Square-mesh Few-Group Reactor Diffusion Code* - TRG Report 1761 (R) - 1969.
- [32] BRIDGE M.J. and HOWARTH N. - *Corrections to the BENOIST DIFFUSION COEFFICIENTS FOR CAGR-TYPE LATTICES*
RD/B/N 1645.
Report of Central Electricity Generating Board - Mars 1970.

- [33] REUSS P. - *Calcul des données à utiliser pour le code de diffusion à deux groupes RIFIFI [1]*
Rapport SPM n° 1020 - Juin 1968.
- [34] BAILLY DU BOIS B. - *Influence de la forme des cellules sur le laplacien et structure fine du flux thermique dans une pile hétérogène*
Rapport CEA n° 740 - 1957.
- [35] AMOUYAL A. et BENOIST P. - *Additif au rapport CEA n° 571 - Interprétation des résultats obtenus par S.A.KUSHNERTIUK et C. Mc KAY*
Rapport SPM n° 246 - Mars 1957.
- [36] REUSS P. - *Facteur d'utilisation thermique - Etude du facteur de forme*
Rapport SPM n° 1094 - Octobre 1969.
- [37] ANGOT A. - *Compléments de mathématiques*
Editions de la Revue d'Optique - Paris - 1957.
- [38] DWIGHT H.B. - *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*
The MACMILLAN COMPANY - New York - 1965.
- [39] CASE K.M. and ZWEIFEL P.F. - *Linear Transport Theory*
Addison - Wesley Publishing Company - Reading, Massachusetts - March 1967.
- [40] NAUDET R. - *Etude de la migration des neutrons dans un milieu multiplicateur en fonction de l'intensité et la distribution des captures*
Rapport CEA-R 2476 - 1964.
- [41] NAUDET R. - *Analyse des formalismes de la théorie hétérogène*
Rapport SPM n° 1001 - Août 1967 - Décembre 1968.
Rapport EACRP L-73.

FORMULAIRE ---

Dans le présent mémoire on démontre, en utilisant la théorie du transport à l'intérieur des canaux et la théorie asymptotique dans le modérateur, que les propriétés du k^{ième} canal d'un réacteur hétérogène se traduisent mathématiquement par les relations multigroupes :

Relations polaires :

$$\sum_{1 \leq g' \leq g} \left(a_k^0(g' \rightarrow g) \psi_{ok}^{g',g'}(\vec{r}_k) + c_k^0(g' \rightarrow g) N_k(g',g') \right) + \mu \chi^g \sum_{1 \leq g' \leq NG} \left(b_k^0(g' \rightarrow g) \psi_{ok}^{g',g'}(\vec{r}_k) + d_k^0(g' \rightarrow g) N_k(g',g') \right) = 0$$

Relations dipolaires :

$$\sum_{1 \leq g' \leq g} \left(a_k^1(g' \rightarrow g) \vec{\nabla} \psi_{ok}^{g',g'}(\vec{r}_k) + c_k^1(g' \rightarrow g) \vec{V}_k(g',g') \right) + \mu \chi^g \sum_{1 \leq g' \leq NG} \left(b_k^1(g' \rightarrow g) \vec{\nabla} \psi_{ok}^{g',g'}(\vec{r}_k) + d_k^1(g' \rightarrow g) \vec{V}_k(g',g') \right) = 0$$

dans lesquelles NG désigne le nombre de groupes ; μ est l'inverse du facteur de multiplication effectif du réacteur ; χ^g représente la fraction des neutrons nés par fission qui entrent dans le groupe g ; N_k et V_k sont les composantes polaires et dipolaires de la partie asymptotique, dans le modérateur, de la contribution au flux (dans le réacteur) du k^{ième} canal ; $\psi_{ok}(\vec{r}_k)$ et $\vec{\nabla} \psi_{ok}(\vec{r}_k)$ représentent, au centre $\vec{r}_k$ du k^{ième} canal, la somme des contributions des autres canaux et son gradient ; a_k , b_k , c_k et d_k sont des paramètres calculables en cellule ouverte.

On démontre également que le $k^{\text{ième}}$ canal du réacteur est relié, au niveau du groupe g , aux autres canaux par les relations géométriques monocinétiques :

$$\psi_{ok}^{g,g}(\vec{r}_k) = \sum_{j \neq k} \left[N_j(g,g) K_0(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) + \vec{V}_j(g,g) \cdot \frac{(\vec{r}_k - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} K_1(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \right]$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \psi_{ok}^{g,g}(\vec{r}_k) = & \sum_{j \neq k} \left[-N_j(g,g) K_m^g K_1(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \frac{(\vec{r}_k - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \right. \\ & \left. + \vec{V}_j(g,g) \frac{K_1(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} - \left(\vec{V}_j(g,g) \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j) \right) \frac{K_m^g K_2(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^2} (\vec{r}_k - \vec{r}_j) \right] \end{aligned}$$

où K_m^g est l'inverse de la longueur de diffusion dans le modérateur. Ces deux relations définissent le mode d'interactions des pôles et des dipôles.

Si l'on se place au niveau du groupe g , le taux d'absorption et le gradient moyen du flux dans le combustible⁽¹⁾ que contient le $k^{\text{ième}}$ canal sont respectivement donnés par les formules :

$$\int_{V_{uk}} \Sigma_{auk}^g \phi^g dV = V_{uk} \sum_{1 \leq g' \leq g} \left(r_{uk}^0(g' \rightarrow g) \psi_{ok}^{g',g'}(\vec{r}_k) + t_{uk}^0(g' \rightarrow g) N_k(g',g') \right)$$

$$\langle \vec{\nabla} \phi_g \rangle_{V_{uk}} = \frac{1}{\Sigma_{auk}^g} \sum_{1 \leq g' \leq g} \left(r_{uk}^1(g' \rightarrow g) \vec{\nabla} \psi_{ok}^{g',g'}(\vec{r}_k) + t_{uk}^1(g' \rightarrow g) \vec{V}_k(g',g') \right)$$

en désignant par V_{uk} et Σ_{auk}^g respectivement le volume et la section d'absorption (par capture et ralentissement) au niveau du groupe g du combustible inclus dans le $k^{\text{ième}}$ canal et par r_{uk} et t_{uk} des scalaires à partir desquels se calculent a_k , b_k , c_k et d_k . On a :

(1) Voir renvoi (1) page 197.

$$a_k^0(g' \rightarrow g) = m(g', g) \gamma_k^{g', g} + \gamma_{uk}^g (1 - \delta^{g', g}) \sum_{g' \leq g'' < g} \frac{T_{uk}(g'' \rightarrow g)}{\Sigma_{auk}^{g''}} r_{uk}^0(g' \rightarrow g'')$$

$$a_k^1(g' \rightarrow g) = -m(g', g) K_m^g \beta_k^{g', g} + K_m^g \theta_{uk}^g (1 - \delta^{g', g}) \sum_{g' \leq g'' < g} \frac{T_{uk}(g'' \rightarrow g)}{\Sigma_{auk}^{g''}} r_{uk}^1(g' \rightarrow g'')$$

$$b_k^0(g' \rightarrow g) = \gamma_{uk}^g \sum_{g' \leq g'' \leq NG} \eta_k^{g''} r_{uk}^0(g' \rightarrow g'')$$

$$b_k^1(g' \rightarrow g) = \theta_{uk}^g K_m^g \sum_{g' \leq g'' \leq NG} \eta_k^{g''} r_{uk}^1(g' \rightarrow g'')$$

$$c_k^0(g' \rightarrow g) = -\delta^{g', g} + (1 - \delta^{g', g}) \left\{ m(g', g) \frac{\mu_k(g' \rightarrow g)}{K_g^{g'}} + \gamma_{uk}^g \sum_{g' \leq g'' < g} \frac{T_{uk}(g'' \rightarrow g)}{\Sigma_{auk}^{g''}} t_{uk}^0(g' \rightarrow g'') \right\}$$

$$c_k^1(g' \rightarrow g) = -\delta^{g', g} + (1 - \delta^{g', g}) \left\{ \frac{m(g', g) \pi_k(g' \rightarrow g)}{K_g^{g'}} + \theta_{uk}^g K_m^g \sum_{g' \leq g'' < g} \frac{T_{uk}(g'' \rightarrow g)}{\Sigma_{auk}^{g''}} t_{uk}^1(g' \rightarrow g'') \right\}$$

$$d_k^0(g' \rightarrow g) = \gamma_{uk}^g \sum_{g' \leq g'' \leq NG} \eta_k^{g''} t_{uk}^0(g' \rightarrow g'')$$

$$d_k^1(g' \rightarrow g) = \theta_{uk}^g K_m^g \sum_{g' \leq g'' \leq NG} \eta_k^{g''} t_{uk}^1(g' \rightarrow g'')$$

Le symbole $T_1(g' \rightarrow g)$ désigne la section efficace de transfert par ralentissement du groupe g' vers le groupe g du milieu i , $\delta^{g',g}$ est le symbole de KRONECKER. La quantité $m(g',g)$ est solution du système triangulaire :

$$m(g',g) = K_g^{g'} \sum_{g' \leq g'' < g} T_m(g'' \rightarrow g) m(g',g'')$$

avec $m(g,g) = 1$

$$\frac{1}{K_g^{g'}} = \Sigma_{am}^g + \frac{1}{\frac{1}{K_m^{g'}} - \Sigma_{tm}^g + \frac{3 \bar{\mu} \Sigma_{sm}^g}{(K_m^{g'})^2}} \operatorname{argth} \frac{K_m^{g'}}{\Sigma_{tm}^g}$$

et K_m^g solution de l'équation :

$$1 + \frac{\Sigma_{sm}^g \Sigma_{am}^g}{(K_m^g)^2} 3 \bar{\mu} = \frac{\Sigma_{sm}^g + \Sigma_{tm}^g \frac{\Sigma_{sm}^g \Sigma_{am}^g}{(K_m^g)^2} 3 \bar{\mu}}{K_m^g} \operatorname{argth} \frac{K_m^g}{\Sigma_{tm}^g}$$

Les symboles Σ_{ai}^g , Σ_{fi}^g et Σ_{ti}^g représentent respectivement les sections efficaces macroscopiques d'absorption (par capture et ralentissement), de fission et d'absorption totale du milieu i au niveau du groupe g , $\bar{\mu}$ est le cosinus moyen de l'angle de déflexion dans le modérateur.

On a posé :

$$\Sigma_{si}^g = \Sigma_{ti}^g - \Sigma_{ai}^g$$

et

$$\eta_k^g = \frac{\nu_{fi}^g \Sigma_{fi}^g}{\Sigma_{ai}^g}$$

La quantité ν_{fi}^g est le nombre moyen de neutrons que libère une fission lorsqu'elle est provoquée dans le milieu i par des neutrons du groupe g.

Les coefficients γ_{uk}^g et $\gamma_k^{g',g}$ portent le nom de paramètres hétérogènes polaires du k^{ième} canal. Ils admettent respectivement pour formules :

$$\gamma_{uk}^g = \frac{K_m^g}{\Sigma_{auk}^g \left(3 \Lambda_k^g \Sigma_{am}^g K_1(K_m^g c) + K_m^g K_o(K_m^g c) \right)}$$

$$\gamma_k^{g',g} = \frac{K_m^g}{K_m^{g'}} \frac{\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{K_m^{g'}}}{\Sigma_{am}^g} \frac{I_1(K_m^{g'} c)}{K_1(K_m^g c)} \frac{1 - \frac{K_m^{g'} I_o(K_m^{g'} c)}{3 \Lambda_k^g \left(\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{K_m^{g'}} \right) I_1(K_m^{g'} c)}}{1 + \frac{K_m^g K_o(K_m^g c)}{3 \Lambda_k^g \Sigma_{am}^g K_1(K_m^g c)}}$$

dans lesquelles c est le rayon du k^{ième} canal et Λ_k^g sa longueur d'extrapolation polaire.

Les coefficients θ_{uk}^g et $\beta_k^{g',g}$ portent le nom de paramètres hétérogènes dipolaires du k^{ième} canal. Ils admettent respectivement pour formules :

$$\theta_{uk}^g = - \frac{V_{uk} a p_{uk}^{+g}}{3 \pi c^2 \Sigma_{auk}^g \lambda_{uk}^g \left(\frac{K_m^g \int_0^\infty K_1(K_m^g \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}^g, c) d\rho}{c} + \Sigma_{am}^g K_2(K_m^g c) \right)}$$

$$\gamma_{\beta_k}^{g',g} = - \frac{2}{(K_m^{g'})^2} \frac{\Sigma_{am}^g - \frac{1-\delta^{g',g}}{K_g^{g'}}}{\Sigma_{am}^g} \frac{I_2(K_m^{g'} c)}{K_2(K_m^g c)} \frac{1 - \frac{K_m^{g'} \int_0^\infty I_1(K_m^{g'} \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}^g, c) d\rho}{c}}{3 \Lambda_{kdip}^g \left(\Sigma_{am}^g - \frac{1-\delta^{g',g}}{K_g^{g'}} \right) I_2(K_m^{g'} c)}$$

$$1 + \frac{c}{3 \Lambda_{kdip}^g \Sigma_{am}^g K_2(K_m^g c)}$$

où a désigne le rayon du barreau de combustible⁽¹⁾ supposé plein et Λ_{kdip}^g la longueur d'"extrapolation dipolaire" du $k^{\text{ième}}$ canal.

On a de plus :

$$f(\rho, \Sigma_{tm}^g, c) = \lambda_m^g \Sigma_{sm}^g \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^2 \varphi K_{i2} \left(\Sigma_{tm}^g (\sqrt{\rho^2 - c^2 \sin^2 \varphi} - c \cos \varphi) \right)$$

et
$$K_{i2}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{\sin \theta}} \sin \theta d\theta \quad (\text{fonction intégrale de BESSEL})$$

Le symbole λ_i^g représente le libre parcours moyen de transport du milieu i au niveau du groupe g .

$$\lambda_m^g = \frac{1}{\Sigma_{tm}^g - \bar{\mu} \Sigma_{sm}^g}$$

⁽¹⁾ Le combustible comprend les gaines, les bouchons et les centreurs.

La longueur d'extrapolation polaire du $k^{\text{ième}}$ canal est sa longueur d'extrapolation classique ABH. Elle s'écrit :

$$\Lambda_k^g = \lambda_N^g + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{\Gamma_{u_{ok}}^{'+g}} - 1 \right)$$

en appelant λ_N^g la longueur d'extrapolation du canal noir de rayon c et $\Gamma_{u_{ok}}^{'+g}$ la probabilité pour un neutron entrant isotropiquement et uniformément dans le $k^{\text{ième}}$ canal d'y être capturé sans en être sorti.

La longueur d'extrapolation dipolaire du $k^{\text{ième}}$ canal est définie par l'expression :

$$\Lambda_k^g = \frac{\pi (\lambda_m^g + c) \lambda_m^g}{6 P_k^{+g}} \frac{c^2}{a^2}$$

avec

$$P_k^{+g} = P_{uk}^{+g} \left(1 - \frac{\lambda_m^g}{\lambda_{uk}^g} \right) + \frac{\lambda_c}{\lambda_{uk}^g} P_{ck}^{+g} - \frac{a}{\lambda_{uk}^g} P_{\bar{u}k}^{+g}$$

et

$$P_{uk}^{+g} = \frac{\pi c^2}{2 V_{uk}} \lambda_{uk}^g \lambda_m^g \left(\frac{1}{\lambda_m^g} \Gamma_{uk_x}^{'+g} + \frac{q}{8c} \Gamma_{uk_{\Omega x}}^{'+g} \right)$$

$$P_{ck}^{+g} = \frac{\pi c^2}{2 V_{uk}} \lambda_{uk}^g \lambda_m^g \left(\frac{1}{\lambda_m^g} \Gamma_{ck_x}^{'+g} + \frac{q}{8c} \Gamma_{ck_{\Omega x}}^{'+g} \right)$$

$$P_{\bar{u}k}^{+g} = \frac{\pi c^2}{2 V_{uk}} \lambda_{uk}^g \lambda_m^g \left(\frac{1}{\lambda_m^g} \Gamma_{\bar{u}k_x}^{'+g} + \frac{q}{8c} \Gamma_{\bar{u}k_{\Omega x}}^{'+g} \right)$$

Par définition $\Gamma_{1(1)}^{'+}$ (respectivement $\Gamma_{-1}^{'+}$) représente la probabilité pour un neutron entrant fictivement dans le canal d'être capturé fictivement (respectivement en x) dans le milieu i sans être retourné dans le modérateur. La marque distinctive x ou Ω_x placé en bas et à droite de la probabilité indique la façon dont le neutron est entré dans le canal.

Si c'est Ω_x la distribution angulaire entrante a pour intensité :

$$\frac{4}{3 \pi^2 c} \Omega_x, \text{ si c'est } x, \text{ la distribution angulaire entrante est isotrope et a pour intensité : } - \frac{3 x}{2 \pi^2 c^2}.$$

Les quantités r_{uk} et t_{uk} s'expriment à partir des paramètres hétérogènes polaires et dipolaires. On a :

(1)

On dit qu'un neutron entre fictivement dans le canal, relativement à la direction Ox , avec la densité $D(\vec{\Omega}, \alpha)$ lorsque l'intégrale

$$\int_{S_{\text{canal}}} dS \vec{n}_i \cdot \int_{(2\pi)_-} \vec{\Omega} \Omega_x D(\vec{\Omega}) d\Omega \text{ vaut un.}$$

On dit qu'un neutron est capturé fictivement, relativement à la direction Ox , dans le milieu i avec l'intensité angulaire ψ lorsque

$$\text{l'intégrale } \frac{1}{\lambda_i} \int_{(i)} dV \int_{(4\pi)} d\Omega \Omega_x \psi \text{ vaut un.}$$

On dit qu'un neutron est capturé en x dans (i) avec l'intensité ψ

$$\text{lorsque l'intégrale } \Sigma_{ai} \int_{(i)} \frac{x dV}{(\rho_i^2 + \rho_i'^2)^{1/2}} \int_{(4\pi)} \psi d\Omega \text{ vaut un } (\rho_i \text{ et}$$

ρ_i' sont les rayons intérieur et extérieur du milieu i).

$$r_{uk}^0(g' \rightarrow g) = m(g', g) \left[p_{ok}(g' \rightarrow g) - \frac{\gamma_k^{g', g}}{\gamma_{uk}^g} P_{uu_{ok}}^{*g} \right]$$

$$r_{uk}^1(g' \rightarrow g) = m(g', g) \left[p_{1k}(g' \rightarrow g) + \frac{\gamma_k^{g', g}}{\theta_{uk}^g} P_{\bar{u}\bar{u}_k}^{*g} \right]$$

$$t_{uk}^0(g' \rightarrow g) = m(g', g) \left[\frac{P_{uu_{ok}}^{*g}}{\gamma_{uk}^g} \delta^{g', g} + \frac{1 - \delta^{g', g}}{K_g^{g'}} \left(\frac{2\pi c}{V_{uk}} \Sigma_{auk}^g \gamma_{uk}^g h_k(g' \rightarrow g) - \frac{\mu_k(g' \rightarrow g)}{\gamma_{uk}^g} P_{uu_{ok}}^{*g} \right) \right]$$

$$t_{uk}^1(g' \rightarrow g) = m(g', g) \left[\frac{P_{\bar{u}\bar{u}_k}^{*g}}{K_m^g \theta_{uk}^g} \delta^{g', g} + \frac{1 - \delta^{g', g}}{K_g^{g'}} \left(\frac{4\pi c \Sigma_{auk}^g \theta_{uk}^g K_m^g}{a^2 V_{uk}} \ell_k(g' \rightarrow g) - \frac{\pi_k(g' \rightarrow g)}{\theta_{uk}^g K_m^g} P_{\bar{u}\bar{u}_k}^{*g} \right) \right]$$

avec

$$p_{ok}(g' \rightarrow g) = \frac{2\pi c}{V_{uk}} \left(- \frac{\gamma_k^{g', g}}{\gamma_k^g} \frac{K_1(K_m^g c)}{K_m^g} \Sigma_{am}^g + \left(\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g', g}}{K_g^{g'}} \right) \frac{I_1(K_m^g c)}{K_m^{g'}} \right)$$

$$p_{1k}(g' \rightarrow g) = -4 \frac{P_{\bar{u}\bar{u}_k}^{*g}}{P_k^{+g}} \frac{\pi c^2}{\lambda_u^g a V_{uk}} \left[\Sigma_{am}^g \frac{\gamma_k^{g', g}}{\beta_k^g} K_2(K_m^g c) + 2 \left(\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g', g}}{K_g^{g'}} \right) \frac{I_2(K_m^g c)}{(K_m^{g'})^2} \right]$$

$$\mu_k(g' \rightarrow g) = - \frac{\kappa_m^{g'} \left(\Sigma_{am}^g - \frac{1}{\kappa_m^{g'}} \right) \frac{K_1(K_m^{g'} c)}{\kappa_m^{g'}} + \Sigma_{auk}^g \gamma_{uk}^g h_k(g' \rightarrow g)}{\frac{\Sigma_{am}^g K_1(K_m^g c)}{\kappa_m^g}}$$

$$\pi_k(g' \rightarrow g) = - \frac{\kappa_m^{g'} \left(\Sigma_{am}^g - \frac{1}{\kappa_m^{g'}} \right) \frac{K_2(K_m^{g'} c)}{\kappa_m^{g'}} c + \beta_{ok}^g \kappa_m^g \ell_k(g' \rightarrow g)}{\frac{\Sigma_{am}^g K_2(K_m^g c)}{\kappa_m^g} c}$$

et

$$h_k(g' \rightarrow g) = \frac{\kappa_m^g K_1(K_m^g c) K_0(K_m^{g'} c) - \kappa_m^{g'} K_1(K_m^{g'} c) K_0(K_m^g c)}{(K_m^g)^2 - (K_m^{g'})^2}$$

$$\ell_k(g' \rightarrow g) = \frac{\kappa_m^g K_1(K_m^{g'} c) K_0(K_m^g c) - \kappa_m^{g'} K_1(K_m^g c) K_0(K_m^{g'} c)}{(K_m^g)^2 - (K_m^{g'})^2}$$

$$\beta_{ok}^g = - \Sigma_{auk}^g \frac{\lambda_{uk}^g}{a} \frac{P_k^{+g}}{P_{uk}^{+g}} \theta_{uk}^g$$

La quantité $P_{uu_{ok}}^{*g}$ est la probabilité pour un neutron né isotropiquement et uniformément dans le combustible d'y être capturé ; P_{uuk}^{*g} est la probabilité pour un neutron né en x (avec l'intensité $\frac{x}{\pi V_{uk} a}$) dans le combustible d'y être capturé en x .

L'expression asymptotique du flux dans le modérateur s'écrit en $\vec{r}$, au niveau du groupe g :

$$\phi_{as}^g(\vec{r}) = \sum_k \sum_{1 \leq g' \leq g} m(g', g) \left[N_k(g', g') K_0(K_m^{g'} |\vec{r} - \vec{r}_k|) + \vec{V}_k(g', g') \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} K_1(K_m^{g'} |\vec{r} - \vec{r}_k|) \right].$$

ANNEXE A

PREMIERS COEFFICIENTS DU DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FOURIER DE L'EXPRESSION

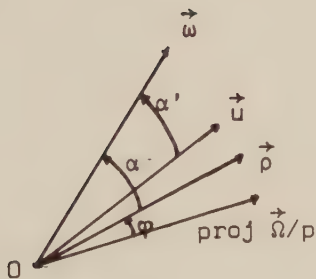
$$\frac{e^{-K_m \vec{u} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_k)}}{\Sigma_{tm} - K_m \vec{u} \cdot \vec{\Omega}} \text{ EN FONCTION DE L'ANGLE } \alpha \text{ QUI AMENE } \vec{r} - \vec{r}_k \text{ SUR UNE DIRECTION } \vec{W} \text{ ORTHOGONALE A L'AXE DU CANAL } k$$

Les notations et conventions adoptées sont celles de la section A du chap. II.

Soit P le plan de section droite du réacteur qui contient le point $\vec{r}$. On pose : $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}_k$.

L'expression $\frac{e^{-K_m \vec{u} \cdot \vec{\rho}}}{\Sigma_{tm} - K_m \vec{u} \cdot \vec{\Omega}}$ s'écrit encore :

$$E(\rho, \alpha - \alpha', \varphi, \theta) = \frac{e^{-K_m \rho \cos(\alpha - \alpha')}}{\Sigma_{tm} - K_m \cos(\alpha - \alpha' + \varphi) \sin \theta}$$



- où α désigne l'angle qui amène $\vec{\rho}$ sur $\vec{W}$
- α' l'angle qui amène $\vec{u}$ sur $\vec{W}$
- φ l'angle qui amène la projection de $\vec{\Omega}$ dans P sur $\vec{\rho}$
- θ l'angle qui amène $\vec{\Omega}$ sur la direction $\vec{Oz}$ perpendiculaire à P
- ρ le module de $\vec{\rho}$.

En fonction de α , on peut développer E en série de FOURIER :

$$E = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \alpha + a_2 \sin \alpha \quad (A.1)$$

avec $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} E(\rho, \alpha - \alpha', \varphi, \theta) d\alpha \quad (A.2)$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} E(\rho, \alpha - \alpha', \varphi, \theta) \cos \alpha d\alpha \quad (A.3)$$

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} E(\rho, \alpha - \alpha', \varphi, \theta) \sin \alpha \, d\alpha \quad (A.4)$$

Compte tenu du changement de variable $\alpha = \alpha_0 + \alpha'$, (A.2) devient :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha'}^{2\pi - \alpha'} E(\rho, \alpha_0, \varphi, \theta) \, d\alpha_0 \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha'}^0 E(\alpha_0) \, d\alpha_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi - \alpha'} E(\alpha_0) \, d\alpha_0 \end{aligned}$$

Dans l'intégrale sur le segment $[-\alpha', 0]$, on pose $\alpha_0 = \beta - 2\pi$. Elle devient, grâce à la périodicité du cosinus dans E :

$$\frac{1}{\pi} \int_{2\pi - \alpha'}^{2\pi} E(\beta) \, d\beta = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi - \alpha'}^{2\pi} E(\alpha_0) \, d\alpha_0$$

Il en résulte que :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-K_m \rho \cos \alpha_0}}{\Sigma_{tm} - K_m \cos(\alpha_0 + \varphi) \sin \theta} \, d\alpha_0$$

On montrerait de même qu'on peut écrire :

$$a_1 = a_{1,1} \cos \alpha' - a_{1,2} \sin \alpha'$$

$$a_2 = a_{1,2} \cos \alpha' + a_{1,1} \sin \alpha'$$

avec :

$$a_{1,1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-K_m \rho \cos \alpha_0}}{\Sigma_{tm} - K_m \cos (\alpha_0 + \varphi) \sin \theta} \cos \alpha_0 d\alpha_0$$

$$a_{1,2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-K_m \rho \cos \alpha_0}}{\Sigma_{tm} - K_m \cos (\alpha_0 + \varphi) \sin \theta} \sin \alpha_0 d\alpha_0$$

On peut remarquer que a_0 , $a_{1,1}$ et $a_{1,2}$ sont indépendants de $\vec{u}$. Ils ne dépendent que de la position relative de $\vec{\rho}$ et de $\vec{\Omega}$. Ils sont invariants par translation du couple $(\vec{\rho}, \vec{\Omega})$ autour de $\vec{Oz}$.

ANNEXE B

JUSTIFICATION DU CHANGEMENT DE DOMAINE D'INTEGRATION POUR LE CALCUL DES INTEGRALES FIGURANT DANS LA RELATION (II.A.13)

Les notations et conventions adoptées sont celles de la section A du chapitre II.

Admettons que le remplacement de la condition $(\vec{r} - \vec{r}_j) \cdot \vec{u} > 0$ par la condition $(\vec{r}_k - \vec{r}_j) \cdot \vec{u} > 0$ conduise à oublier certains termes complémentaires.

En tout état de cause, on a le droit d'écrire :

$$\sum_{j \neq k} \int_{(\vec{r} - \vec{r}_j) \cdot \vec{u} > 0} du f_j(\vec{u}) e^{-K_m \vec{u} \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j)} =$$

$$\sum_{j \neq k} \int_{(\vec{r}_k - \vec{r}_j) \cdot \vec{u} > 0} du f_j(\vec{u}) e^{-K_m \vec{u} \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j)} + A(\vec{r})$$

et

$$\sum_{j \neq k} \int_{(\vec{r} - \vec{r}_j) \cdot \vec{u} > 0} du f_j(\vec{u}) \vec{u} e^{-K_m \vec{u} \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j)} =$$

$$\sum_{j \neq k} \int_{(\vec{r}_k - \vec{r}_j) \cdot \vec{u} > 0} du f_j(\vec{u}) \vec{u} e^{-K_m \vec{u} \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j)} + \vec{B}(\vec{r})$$

où A et $\vec{B}$ restent à déterminer.

On intègre (II.A.13) sur l'angle solide (4π). Compte tenu de (II.A.7), (II.A.16), (II.A.17), (II.A.18) et du choix de $\vec{W}$ (page 14), il vient :

$$\begin{aligned}
\phi_{ok}(\vec{r}) = I_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) (\phi_{ok}(\vec{r}_k) + A(\vec{r})) \\
+ \frac{2}{K_m} I_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \cdot \left(\vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k) \left(1 - \frac{K_m \vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k) \cdot \vec{B}(\vec{r})}{|\vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k)|^2} \right) \right. \\
\left. - K_m \frac{R \vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k)}{|\vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k)|^2} (R \vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k) \cdot \vec{B}(\vec{r})) \right) \quad (B.1)
\end{aligned}$$

On a vu que les flux ϕ_j dont la somme est ϕ_{ok} peuvent être remplacés, sur l'emplacement E_k du canal k , par leurs parties asymptotiques dans le modérateur. Si l'on développe dans le modérateur de la géométrie j la partie asymptotique de ϕ_j en série de FOURIER autour de l'axe du canal j , on obtient immédiatement :

$$\phi_{jas}(\vec{r}) = N_j K_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_j|) + V_j \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} K_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_j|) + \dots \quad (B.2)$$

où N_j et V_j traduisent l'influence des sources de ϕ_j .

Or les formules de NEUMANN et plus précisément les propriétés des fonctions de BESSEL (cf. [16B]) nous permettent d'écrire pour tout point $\vec{r}$ appartenant à E_k (donc plus proche de $\vec{r}_k$ que $\vec{r}_j$) :

$$\begin{aligned}
K_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_j|) = K_0(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) I_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \\
+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_n(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) I_n(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \cos n \alpha_j
\end{aligned}$$

et

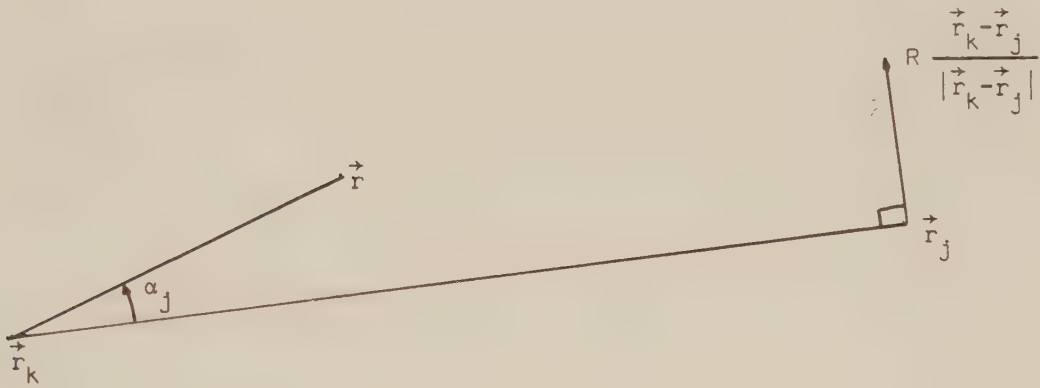
$$\begin{aligned}
\frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} K_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_j|) = \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} K_1(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) I_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \\
+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \left[K_{n+1}(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \cos n \alpha_j + \frac{n}{K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|} K_n(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \vec{\rho}_{n-1} \right]
\end{aligned}$$

avec

$$\vec{\rho}_{n-1} = \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} \cos n \alpha_j + R \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \sin n \alpha_j$$

On désigne par α_j l'angle qui amène $\vec{r}_j - \vec{r}_k$ sur $\vec{r} - \vec{r}_k$.

En se reportant à la figure ci-dessous, on vérifie aisément que $\vec{\rho}_{n-1}$ se déduit du vecteur unitaire $\frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|}$ par une rotation de $+(n-1)\alpha_j$ autour de l'axe du canal k.



Il s'ensuit que sur l'emplacement du canal k ϕ_j admet pour développement en série de FOURIER (limité à l'ordre un) autour de l'axe de ce canal, l'expression (voir hypothèse de la page 10) :

$$\begin{aligned} \phi_j(\vec{r}) = & I_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \left[N_j K_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) + \vec{V}_j \cdot \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} K_1(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) + \dots \right] \\ & + 2 I_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \frac{(\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \cdot \left[-N_j K_1(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} + \frac{K_1(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \vec{V}_j \right. \\ & \left. - (\vec{V}_j \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j)) \frac{K_2(K_m |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^2} (\vec{r}_k - \vec{r}_j) + \dots \right] \end{aligned}$$

Compte tenu de (B.2), cette expression peut encore s'écrire :

$$\phi_j(\vec{r}) = I_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \phi_j(\vec{r}_k) + \frac{2}{K_m} I_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \frac{(\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \cdot \vec{\nabla} \phi_j(\vec{r}_k)$$

Par suite le développement en série de FOURIER autour de l'axe

du canal k de $\phi_{ok} = \sum_{j \neq k} \phi_j$ sur E_k , est égal à :

$$\phi_{ok}(\vec{r}) = I_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \phi_{ok}(\vec{r}_k) + \frac{2}{K_m} I_1(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) \frac{(\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \cdot \vec{\nabla} \phi_{ok}(\vec{r}_k)$$

En identifiant, terme à terme, ce développement avec celui obtenu en (B.1), on voit que la contribution de $A(\vec{r})$ et de $\vec{B}(\vec{r})$ à des termes de révolution ou à des termes antisymétriques (par rapport à l'axe du canal k) dans l'expression (II.A.13) de v_{ok} , est nulle.

ANNEXE C

EFFETS RESULTANT DU REMPLACEMENT D'UNE PARTIE D'UN MILIEU HOMOGENE FAIBLEMENT CAPTURANT PAR UN CANAL COMPORTANT UNE CAVITE ET UN BARREAU ABSORBANT

On se limite au schéma monocinétique. On suppose le milieu homogène infiniment étendu⁽¹⁾ et alimenté par des sources filiformes⁽²⁾ fixes en intensité et situées loin (à plus de quelques libres parcours dans le milieu homogène) de l'emplacement où l'on désire introduire le canal. Pour simplifier on admet que le choc est isotrope.

Soient v_0 et v les flux angulaires créés par ces sources respectivement en l'absence et en la présence du canal.

Le flux v_0 obéit, sur l'emplacement du canal et dans ses environs immédiats, à l'équation du transport du milieu homogène sans source :

$$\text{div } \vec{\Omega} v_0 + \Sigma_{tm} v_0 = \frac{\Sigma_{sm} \phi_0}{4 \pi}$$

avec $\phi_0 = \int_{(4\pi)} v_0 d\Omega$
et où l'indice m désigne le milieu homogène.

Loin de cet emplacement, il obéit à la même équation mais avec source :

$$\text{div } \vec{\Omega} v_0 + \Sigma_{tm} v_0 = \frac{\Sigma_{sm} \phi_0}{4 \pi} + S$$

Le flux v obéit aux mêmes équations que v_0 hors de l'emplacement du canal. Mais à l'intérieur du canal, dans la cavité, il satisfait à l'équation :

$$\text{div } \vec{\Omega} v = 0 \quad ,$$

(1) dans toutes les directions

(2) évidemment linéaires, parallèles à l'axe du canal et de hauteur infinie.

et dans le barreau, à l'équation :

$$\text{div } \vec{\Omega} v + \Sigma_{tu} v = \frac{\Sigma_{su} \phi}{4 \pi}$$

dans laquelle : $\phi = \int_{(4\pi)} v d\Omega$

On pose :

$$v = v_0 + v_1 \quad (C.1)$$

Compte tenu de la linéarité de l'équation de BOLTZMANN, on voit immédiatement que dans la "cellule ouverte"⁽¹⁾ constituée par le canal entouré par du milieu homogène jusqu'à l'infini v_1 est un flux angulaire qui obéit,

à l'extérieur du canal, à l'équation :

$$\text{div } \vec{\Omega} v_1 + \Sigma_{tm} v_1 = \frac{\Sigma_{sm} \phi_1}{4 \pi} ,$$

à l'intérieur du canal, dans la cavité, à l'équation :

$$\text{div } \vec{\Omega} v_1 = \Sigma_{tm} v_0 - \frac{\Sigma_{sm} \phi_0}{4 \pi} ,$$

et dans le barreau, à l'équation :

$$\text{div } \vec{\Omega} v_1 + \Sigma_{tu} v_1 = \frac{\Sigma_{su} \phi_1}{4 \pi} + (\Sigma_{tm} - \Sigma_{tu}) v_0 - \frac{\Sigma_{sm} - \Sigma_{su}}{4 \pi} \phi_0$$

avec $\phi_1 = \int_{(4\pi)} v_1 d\Omega$

Si l'on suppose le canal de hauteur infinie, on s'aperçoit que le problème posé par le calcul de v_1 est identique à celui posé par le calcul de v_k en géométrie k (mis à part les sources de fission), v_0 jouant le rôle de v_{ok} . Le milieu homogène faiblement capturant peut en effet être identifié à un modérateur du genre eau lourde ou graphite.

⁽¹⁾ Selon la terminologie employée par ALPIAR [8C].

On développe v_0 en série de FOURIER autour de l'axe du canal et l'on utilise les paramètres hétérogènes $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\beta}$ pour écrire l'expression de la partie asymptotique de ϕ_1 à l'extérieur du canal.

Le fait que les paramètres hétérogènes $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\beta}$ puissent caractériser un canal aussi bien dans un problème à sources que dans un problème de calcul de réacteur est très intéressant. Car si dans le second cas le "flux de référence" v_{ok} est une construction de l'esprit⁽¹⁾ dans le premier cas le flux de référence v_0 possède une signification physique, puisque c'est le flux qui existe en l'absence de canal. Les situations avant et après l'introduction du canal sont directement comparables et on peut espérer tirer de cette comparaison un moyen pour calculer les paramètres hétérogènes en dehors du cadre de la théorie hétérogène.

Ainsi pour le canal vide, si l'on désigne par V_m le volume entourant l'emplacement du canal et par V_c le volume de ce dernier, l'intégration de la relation de conservation sur tout l'espace donne, en l'absence du canal :

$$\int_{V_m} S \, dV = \Sigma_{am} \int_{V_m} \phi_0 \, dV + \Sigma_{am} \int_{V_c} \phi_0 \, dV, \quad (C.2)$$

en présence du canal :

$$\int_{V_m} S \, dV = \Sigma_{am} \int_{V_m} \phi_0 \, dV + \Sigma_{am} \int_{V_m} \phi_1 \, dV \quad (C.3)$$

De (C.2) et (C.3), on tire :

$$\int_{V_m} \phi_1 \, dV = \int_{V_c} \phi_0 \, dV \quad (C.4)$$

⁽¹⁾ C'est la somme de flux définis indépendamment les uns des autres, dans des géométries séparées, à partir de sources qui prennent en compte la réaction individuelle du canal k.

Sur l'emplacement du canal, le flux ϕ_0 peut être confondu avec sa partie asymptotique (voir début du chapitre II). Le développement en série de FOURIER de cette dernière autour du centre $\vec{r}_0$ de ce canal a pour premier terme ⁽¹⁾ :

$$I_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_0|) \phi_0(\vec{r}_0)$$

Parallèlement, à l'extérieur du canal, ϕ_1 peut être assimilé à son expression asymptotique. Le premier terme du développement en série de FOURIER de cette expression, autour de $\vec{r}_0$, s'écrit :

$$\tilde{\gamma} K_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_0|) \phi_0(r_0)$$

Si c désigne le rayon du canal, (C.4) conduit à :

$$\tilde{\gamma} = \frac{I_1(K_m c)}{K_1(K_m c)} \quad (C.5)$$

On pourra vérifier, au cours de l'exposé principal, que cette formule est la restriction au cas du canal vide de la formule générale de $\tilde{\gamma}$ (cf. (II.B.2.20)).

⁽¹⁾ voir annexe B.

ANNEXE D

CALCUL EN CELLULE DE RAYON INFINI DE LA PROBABILITE $P_{uu_0}^*$ POUR UN NEUTRON NE ISOTROPIQUEMENT ET UNIFORMEMENT DANS LE BARREAU DU CANAL D'Y ETRE CAPTURE

Les notations et conventions adoptées sont celles du chapitre II.

Considérons une cellule de rayon fini b , centrée sur un canal de type k . D'une façon générale, nous désignerons par $P_{ij_0}^*$ la probabilité pour un neutron né isotropiquement et uniformément dans le milieu i de la cellule d'être capturé dans le milieu j .

Soit f le facteur d'utilisation thermique de la cellule. On a l'égalité :

$$f = P_{mu_0}^* \quad (D.1)$$

L'application du théorème de réciprocité nous fournit la relation :

$$P_{mu_0}^* = P_{um_0}^* \frac{V_u \Sigma_{au}}{V_m \Sigma_{am}} \quad (D.2)$$

où V_u et V_m sont les sections droites respectives du barreau et du modérateur dans la cellule.

La relation de conservation nous donne :

$$P_{um_0}^* = 1 - P_{uu_0}^* \quad (D.3)$$

De (D.1), (D.2) et (D.3) on tire :

$$1 - P_{uu_0}^* = \frac{V_m \Sigma_{am}}{V_u \Sigma_{au}} f \quad (D.4)$$

L'expression de f en fonction de la longueur d'extrapolation du canal Λ s'obtient sans difficultés à partir de la relation (7) de la page 9 de [10] :

$$f = \frac{1}{\frac{V_m K_m \Delta_o(K_m c)}{2 \pi c \Delta_1(K_m c)} + \frac{3}{2} \frac{V_m \Sigma_{am}}{\pi c} \Lambda} \quad (D.5)$$

avec (voir [35]) :

$$\Lambda = \lambda_N + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{\Gamma_{uO}'} - 1 \right)$$

$$\Delta_o(K_m c) = I_1(K_m b) K_o(K_m c) + K_1(K_m b) I_o(K_m c)$$

$$\Delta_1(K_m c) = I_1(K_m b) K_1(K_m c) - K_1(K_m b) I_1(K_m c)$$

Le symbole Γ_{uO}' représente la probabilité⁽¹⁾ pour un neutron entrant dans le canal isotropiquement et uniformément, d'être capturé dans le barreau sans être retourné dans le modérateur. Quant à λ_N , c'est la longueur d'extrapolation du canal noir.

En remplaçant f dans (D.4) par son expression (D.5), on obtient :

$$1 - P_{uuO}^* = \frac{1}{\left(\frac{K_m \Delta_o(K_m c)}{\Sigma_{am} \Delta_1(K_m c)} + 3 \Lambda \right) \frac{\Sigma_{au} V_u}{2 \pi c}} \quad (D.6)$$

A la limite, lorsque b tend vers l'infini, cette formule devient :

⁽¹⁾ Cette probabilité est connue sous le nom de noirceur du canal.

$$1 - P_{uu_o}^* = \frac{1}{\frac{\sum_{au} V_u}{2\pi c} \left(\frac{K_m K_o (K_m c)}{\sum_{am} K_1 (K_m c)} + 3 \Lambda \right)} \quad (D.7)$$

C'est l'expression cherchée.

CALCUL DE γ_{ub}

L'intégration de la relation de conservation $\text{div } \vec{j} + \sum_a \varphi = \delta_u$ dans la cellule de rayon fini b donne⁽¹⁾, si l'on assimile le flux dans le modérateur à sa partie asymptotique :

$$\sum_{am} \gamma_{ub} 2\pi \int_c^b \Delta_o(K_m \rho) \rho d\rho = (1 - P_{uu_{ob}}^*) V_u \quad (D.8)$$

où l'indice b marque la taille finie de la cellule.

Il est facile de montrer que (voir [16B]) :

$$\Delta_o(K_m \rho) \rho = -\frac{1}{K_m} \frac{d}{d\rho} (\Delta_1(K_m \rho) \rho)$$

avec

$$\Delta_1(K_m \rho) = I_1(K_m b) K_1(K_m \rho) - K_1(K_m b) I_1(K_m \rho)$$

Il en résulte que :

$$\gamma_{ub} = \frac{K_m (1 - P_{uu_{ob}}^*) V_u}{2\pi c \sum_{am} \Delta_1(K_m c)} \quad (D.9)$$

$$\text{car} \quad \Delta_1(K_m b) = 0$$

⁽¹⁾ Le courant est nul à la frontière de la cellule.

En remplaçant $1 - P_{uu_{ob}}^*$ par sa valeur tirée de (D.6), il vient :

$$\gamma_{ub} = \frac{K_m}{\Sigma_{au} (3\Lambda \Sigma_{am} \Delta_1(K_m c) + K_m \Delta_o(K_m c))} \quad (D.10)$$

ANNEXE E

EXPRESSION DU PARAMETRE $\tilde{\gamma}$

De (II.B.2.18), on tire :

$$\frac{1 - \tilde{\gamma} S_o}{\gamma_u} = \frac{1}{\gamma_{ub} I_1(K_m b)}$$

soit
$$\tilde{\gamma} = \left(1 - \frac{\gamma_u}{\gamma_{ub} I_1(K_m b)} \right) \frac{1}{S_o} \quad (E.1)$$

En remplaçant γ_u et γ_{ub} par leurs expressions respectivement écrites en (II.B.2.4) et (II.B.2.17), il vient :

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{S_o} \left(1 - \frac{3\Lambda \sum_{am} \Delta_1(K_m c) + K_m \Delta_o(K_m c)}{(3\Lambda \sum_{am} K_1(K_m c) + K_m K_o(K_m c)) I_1(K_m b)} \right)$$

ou, en réduisant au même dénominateur :

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{S_o} \frac{3\Lambda \sum_{am} K_1(K_m b) I_1(K_m c) - K_m K_1(K_m b) I_o(K_m c)}{(3\Lambda \sum_{am} K_1(K_m c) + K_m K_o(K_m c)) I_1(K_m b)}$$

Compte tenu de (II.B.2.19), on arrive à :

$$\tilde{\gamma} = \frac{3\Lambda \sum_{am} I_1(K_m c) - K_m I_o(K_m c)}{3\Lambda \sum_{am} K_1(K_m c) + K_m K_o(K_m c)} \quad (E.2)$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\gamma = \frac{I_1(K_m c)}{K_1(K_m c)} \frac{1 - \frac{K_m I_0(K_m c)}{3\Lambda \sum_{am} I_1(K_m c)}}{1 + \frac{K_m K_0(K_m c)}{3\Lambda \sum_{am} K_1(K_m c)}} \quad (E.3)$$

ANNEXE F

CALCUL DU FACTEUR D'UTILISATION THERMIQUE D'UN RESEAU INFINI PERIODIQUE ET DE LA VALEUR A LA FRONTIERE DU CANAL DU RAPPORT DE LA PARTIE POLAIRE DU FLUX ASYMPTOTIQUE REGNANT DANS LE MODERATEUR A SA DERIVEE, EN UTILISANT LA NOUVELLE FORMULATION HETEROGENE

Les notations et les conventions adoptées sont celles du chapitre II.

1ère partie

Calcul du facteur d'utilisation thermique

On considère un réseau infini constitué par la répétition périodique d'un seul type de canal, lui-même composé de deux milieux coaxiaux : une cavité et un barreau plein de combustible. On admet que dans le modérateur la source formée par les neutrons ralentis au niveau du groupe thermique est isotrope et uniforme (cf. [20]). Soit $\frac{q}{4\pi}$ l'intensité de cette source et v le flux angulaire thermique régnant dans le réseau. On suppose que le combustible ne ralentit pas les neutrons.

On pose :

$$v = n + \frac{q}{4\pi \Sigma_{am}} \quad (F.1)$$

Compte tenu de la linéarité de l'équation de BOLTZMANN, il est facile de voir que n est un flux angulaire qui obéit,

dans le modérateur, à l'équation du transport sans source :

$$\text{div } \vec{\Omega} n + \Sigma_{tm} n = \frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} N$$

à l'intérieur de chaque canal, dans la cavité, à l'équation du transport sans source :

$$\text{div } \vec{\Omega} n = 0 ,$$

dans le barreau, à l'équation du transport avec source :

$$\text{div } \vec{\Omega} n + \Sigma_{tu} n = \frac{\Sigma_{su}}{4\pi} N - \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} \frac{q}{4\pi}$$

On a posé : $N = \int_{(4\pi)} n d\Omega$

Le changement de fonction (F.1) a eu pour effet de rejeter dans le barreau de chaque canal les sources réparties initialement dans le modérateur. On est ramené au problème étudié au paragraphe B.2 b du chapitre II.

Des résultats obtenus dans ce paragraphe au moyen de la nouvelle formulation hétérogène et des formules (II.A.2A) et (II.A.3A), on déduit que :

1 - la contribution n_k du canal k au flux n est le flux qui existe dans la géométrie k (constituée en entourant le canal k par du modérateur jusqu'à l'infini) lorsqu'on introduit à l'intérieur du canal, dans la cavité, la source d'intensité :

$$- \left[\Sigma_{tm} \frac{a_o}{2} - \frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} I_o(K_m \rho) \right] \frac{\gamma_u S_o}{1 - \tilde{\gamma} S_o} \times \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q ,$$

dans le barreau, la source d'intensité :

$$- \left[(\Sigma_{tm} - \Sigma_{tu}) \frac{a_o}{2} - \frac{\Sigma_{sm} - \Sigma_{su}}{4\pi} I_o(K_m \rho) \right] \frac{\gamma_u S_o}{1 - \tilde{\gamma} S_o} \times \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q$$

$$- \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} \frac{q}{4\pi}$$

2 - dans le modérateur de la géométrie k, la partie asymptotique du flux scalaire N_k associé à n_k a pour expression :

$$N_{k_{as}}(\vec{r}) = - \frac{\Sigma_{au} \gamma_u}{\Sigma_{am} (1 - \tilde{\gamma} S_o)} q K_o(K_m \rho) \quad (F.2)$$

3 - la contribution des autres canaux a pour intensité sur l'emplacement du canal k :

$$N_{ok}(\vec{r}) = - \frac{\gamma_u S_o}{1 - \tilde{\gamma} S_o} \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q I_o(K_m \rho) \quad (F.3)$$

Le taux d'absorption i_k du flux N_k dans le barreau inclus dans le canal k peut être obtenu en retranchant de l'intégrale des sources de n_k dans le volume du canal l'intégrale de la capture de N_k dans le modérateur. Si l'on assimile N_k à sa partie asymptotique dans le modérateur, il vient, compte tenu de (II.A.16) :

$$i_k = \frac{2\pi}{K_m} \left[- \Sigma_{am} I_1(K_m c) c + \Sigma_{au} I_1(K_m a) a \right] \frac{\gamma_u S_o}{1 - \tilde{\gamma} S_o} \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q \\ - \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q \pi a^2 + \frac{\Sigma_{au} \gamma_u}{1 - \tilde{\gamma} S_o} q \frac{2\pi}{K_m} K_1(K_m c) c$$

On désigne par a le rayon du barreau.

Le taux d'absorption de N dans le même volume vaut par suite (en vertu de (F.3)) :

$$i = \frac{2\pi}{K_m} \frac{\Sigma_{au} \gamma_u}{1 - \tilde{\gamma} S_o} q c \left[K_1(K_m c) - S_o I_1(K_m c) \right] - \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q \pi a^2 \quad (F.4)$$

En se reportant à la relation (F.1), on voit immédiatement que le facteur d'utilisation thermique f du réseau s'écrit en fonction des paramètres hétérogènes :

$$f = \frac{2\pi c}{K_m V_m} \frac{\sum_{au} \gamma_u}{1 - \tilde{\gamma} S_o} \left[K_1(K_m c) - S_o I_1(K_m c) \right] \quad (F.5)$$

On désigne par V_m le volume du modérateur contenu dans la cellule élémentaire.

La substitution dans (F.5) de γ_u et de $\tilde{\gamma}$ par leurs expressions (II.B.2.4) et (II.B.2.20) donne⁽¹⁾ :

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{3}{2} \frac{\sum_{am} V_m}{\pi c} \Lambda + \frac{K_m V_m}{2\pi c} \frac{K_o(K_m c) + S_o I_o(K_m c)}{K_1(K_m c) - S_o I_1(K_m c)} - 1 \quad (F.6)$$

(1)

En effet, il vient :

$$\frac{1}{f} = \frac{K_m V_m}{2\pi c} \frac{1 - S_o \frac{3\Lambda \sum_{am} I_1(K_m c) - K_m I_o(K_m c)}{3\Lambda \sum_{am} K_1(K_m c) + K_m K_o(K_m c)}}{\frac{K_m}{3\Lambda \sum_{am} K_1(K_m c) + K_m K_o(K_m c)}} \times \frac{1}{K_1(K_m c) - S_o I_1(K_m c)}$$

Après simplification, on trouve :

$$\frac{1}{f} = \frac{V_m}{2\pi c} \frac{3\Lambda \sum_{am} (K_1(K_m c) - S_o I_1(K_m c)) + K_m (K_o(K_m c) + S_o I_o(K_m c))}{K_1(K_m c) - S_o I_1(K_m c)}$$

ce qu'on peut écrire :

$$\frac{1}{f} = \frac{3\Lambda \sum_{am} V_m}{2\pi c} + \frac{K_m V_m}{2\pi c} \frac{K_o(K_m c) + S_o I_o(K_m c)}{K_1(K_m c) - S_o I_1(K_m c)}$$

Si l'on représente par λ_N la longueur d'extrapolation du canal noir de rayon c et par $\mathcal{P}$ la probabilité pour un neutron né isotropiquement et uniformément dans le barreau d'en sortir, on démontre (cf. [35]) qu'on a :

$$\Lambda = \lambda_N + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{\Gamma_{u0}'} - 1 \right)$$

avec

$$\Gamma_{u0}' = \frac{2 a^2}{c} \Sigma_{au} \mathcal{P}$$

Par suite (F.6) équivaut à :

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{\Sigma_{am} V_m}{\Sigma_{au} V_u} \frac{1}{\mathcal{P}} + K_m^2 b^2 c + \frac{\Sigma_{am} V_m}{\pi c} \left(\frac{3}{2} \lambda_N - 2 \right) \quad (F.7)$$

On a posé :

$$C = \frac{V_m}{2\pi b^2} \frac{K_0(K_m c) + S_0 I_0(K_m c)}{K_m c (K_1(K_m c) - S_0 I_1(K_m c))} - \frac{1}{K_m^2 b^2} \quad (F.8)$$

Jusqu'ici nous n'avons fait aucune hypothèse restrictive sur la forme de la cellule. La formule (F.7) coïncide avec la formule ABH donnée à la page 9 de [10]. Cependant si l'on compare l'expression (F.8) de C à celle de la page 8 de [10], on s'aperçoit qu'elles ne sont identiques que lorsque la cellule est cylindrisée. On a alors, en effet (cf. (II.B.2.19)) :

$$S_0 = \frac{K_1(K_m b)}{I_1(K_m b)}$$

Dans le cas où l'on ne fait pas l'hypothèse de cylindrisation, REUSS a montré [36] qu'on pouvait remplacer S_0 par la somme⁽¹⁾ :

⁽¹⁾ Voir renvoi (1) page 3 de l'annexe M.

$$S_0 = \frac{K_1(K_m b)}{I_1(K_m b)} + \frac{\frac{3}{2} - I_f}{2} + O(K_m^2 \ln K_m)$$

dans laquelle b est le rayon équivalent de la cellule ($\pi b^2 = V_t$) et I_f le facteur de forme de la cellule, défini par BAILLY DU BOIS dans [34].

Cela conduit à évaluer (F.8), quand K_m tend vers zéro, à l'expression donnée dans [34] :

$$C\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{1}{4\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)} \left[\ln \frac{b^2}{c^2} + \frac{2}{b^2} \frac{c^2}{b^2} - \frac{1}{2} \frac{c^4}{b^4} - I_f \right]$$

2ème partie

Calcul de la valeur à la frontière du canal du rapport de la partie polaire du flux asymptotique régnant dans le modérateur à sa dérivée.

On considère un réacteur dont les canaux sont suffisamment espacés (voir fin du chapitre I). On admettra, comme en première partie, que dans le modérateur la source formée par les neutrons ralentis au niveau du groupe thermique est isotrope et uniforme (ce qui est assez bien vérifié en pratique⁽¹⁾). Soit $\frac{q}{4\pi}$ l'intensité de cette source et v le flux angulaire thermique régnant dans le réacteur. On suppose que le combustible ne ralentit pas les neutrons.

On pose :

$$v = n + \frac{q}{4\pi \Sigma_{am}} \quad (F.9)$$

(1)

Pour une étude plus rigoureuse, se reporter à l'annexe Z.

On est ramené comme en première partie au calcul du flux créé par la répartition d'une source uniforme et isotrope d'intensité

$-\frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} \frac{q}{4\pi}$ à l'intérieur du combustible de chaque canal. Soient ϕ et N les flux scalaires associés respectivement aux flux angulaires v et n .

On applique le théorème de séparation. Compte tenu de (II.B.1.1) la partie polaire de la contribution du canal k au flux N admet pour expression asymptotique dans le modérateur :

$$N_{kas_{pol}}(\vec{r}) = (\hat{\gamma} N_{ok}(\vec{r}_k) - \gamma_u \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q) K_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|)$$

où N_{ok} est la somme des contributions des autres canaux.

La partie polaire de cette somme au voisinage de la frontière du canal k peut être confondue avec (voir annexe B) :

$$N_{ok_{pol}}(\vec{r}) = I_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) N_{ok}(\vec{r}_k)$$

On en déduit, compte tenu de (F.9), que dans la zone du modérateur proche du canal k l'expression asymptotique de la partie polaire du flux ϕ s'écrit :

$$\phi_{as_{pol}}(\vec{r}) = \frac{q}{\Sigma_{am}} + I_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|) N_{ok}(\vec{r}_k) + (\hat{\gamma} N_{ok}(\vec{r}_k) - \gamma_u \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} q) K_0(K_m |\vec{r} - \vec{r}_k|)$$

Comme nous allons le voir, il n'est pas nécessaire de calculer la

valeur de $N_{ok}(\vec{r}_k)$ pour obtenir celle de $\frac{\phi_{as_{pol}}(c)}{\phi_{as_{pol}}(c)}$.

On a, en effet :

$$\frac{\phi_{as}^{pol}(c)}{\phi_{as}^{pol}(c)} = \frac{(\tilde{\gamma} K_0(K_m c) + I_0(K_m c)) \frac{N_{ok}(\vec{r}_k)}{q/\Sigma_{am}} + 1 - \gamma_u \Sigma_{au} K_0(K_m c)}{K_m \left[(-\tilde{\gamma} K_1(K_m c) + I_1(K_m c)) \frac{N_{ok}(\vec{r}_k)}{q/\Sigma_{am}} + \gamma_u \Sigma_{au} K_1(K_m c) \right]}$$

Compte tenu de (II.B.2.4) et de (II.B.2.20), il est facile de voir que⁽¹⁾ :

$$\frac{\tilde{\gamma} K_0(K_m c) + I_0(K_m c)}{-\tilde{\gamma} K_1(K_m c) + I_1(K_m c)} = \frac{3 \Lambda \Sigma_{am}}{K_m}$$

$$\frac{1 - \gamma_u \Sigma_{au} K_0(K_m c)}{\gamma_u \Sigma_{au} K_1(K_m c)} = \frac{3 \Lambda \Sigma_{am}}{K_m}$$

(1)

En multipliant haut et bas par $3 \Lambda \Sigma_{am} K_1(K_m c) + K_m K_0(K_m c)$, on obtient après remplacement de $\tilde{\gamma}$ par son expression écrite en (II.B.2.20) :

$$\frac{\tilde{\gamma} K_0(K_m c) + I_0(K_m c)}{-\tilde{\gamma} K_1(K_m c) + I_1(K_m c)} =$$

$$\frac{K_0(K_m c) (3 \Lambda \Sigma_{am} I_1(K_m c) - K_m I_0(K_m c)) + I_0(K_m c) (3 \Lambda \Sigma_{am} K_1(K_m c) + K_m K_0(K_m c))}{-K_1(K_m c) (3 \Lambda \Sigma_{am} I_1(K_m c) - K_m I_0(K_m c)) + I_1(K_m c) (3 \Lambda \Sigma_{am} K_1(K_m c) + K_m K_0(K_m c))}$$

et après remplacement de γ_u par son expression écrite en (II.B.2.4) :

$$\frac{1 - \gamma_u \Sigma_{au} K_0(K_m c)}{\gamma_u \Sigma_{au} K_1(K_m c)} = \frac{3 \Lambda \Sigma_{am} K_1(K_m c) + K_m K_0(K_m c) - K_m K_0(K_m c)}{K_m K_1(K_m c)}$$

Après simplification, on trouve :

Suite page suivante.

Il s'ensuit que :

$$\frac{\phi_{as}(c)}{\phi'_{as}(c)} = \frac{3 \Sigma_{am}}{K_m^2} \Lambda$$

quel que soit le résultat du calcul de $\frac{N_{ok}(\vec{r}_k)}{q/\Sigma_{am}}$.

Nota. A l'ordre deux en K_m près, $\frac{3 \Sigma_{am}}{K_m^2}$ peut être remplacé par le libre parcours λ_m du modérateur (voir fin de l'annexe H).

suite du renvoi de la page précédente.

$$\frac{\gamma K_0(K_m c) + I_0(K_m c)}{-\gamma K_1(K_m c) + I_1(K_m c)} = \frac{3\Lambda \Sigma_{am} [K_0(K_m c) I_1(K_m c) + I_0(K_m c) K_1(K_m c)]}{K_m (K_1(K_m c) I_0(K_m c) + I_1(K_m c) K_0(K_m c))} = \frac{3\Lambda \Sigma_{am}}{K_m}$$

et

$$\frac{1 - \gamma_u \Sigma_{au} K_0(K_m c)}{\gamma_u \Sigma_{au} K_1(K_m c)} = \frac{3\Lambda \Sigma_{am}}{K_m}$$

ANNEXE G

RELATIONS ENTRE LES PROBABILITES FICTIVES

Les notations et les conventions adoptées sont celles du chapitre II § B.3 a. On se limite au schéma monocinétique.

Première partie

Relations de conservation

Relations de conservation du premier type

BENOIST a démontré, dans la section B de sa thèse [12], la relation :

$$\sum_j P_{ij}^* = 1 \quad (G.1)$$

Nous nous proposons de démontrer la relation :

$$\sum_j P_{ij}^- = 0 \quad (G.2)$$

Nous emprunterons un chemin analogue à celui qu'a suivi BENOIST.

Soit ψ le flux angulaire créé dans la cellule par une source isotrope d'intensité $\frac{x}{\pi V_i (\rho_i^2 + \rho_i'^2)^{1/2}}$ répartie dans le milieu i . Il obéit à l'équation du transport :

$$\text{div } \vec{\Omega} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \Sigma_t(\vec{r}) \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_{(4\pi)} \Sigma_s(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}') d\Omega' + \frac{x \delta_i}{\pi V_i (\rho_i^2 + \rho_i'^2)^{1/2}}$$

dans laquelle δ_i symbolise la fonction égale à un dans le milieu i et à zéro partout ailleurs. On suppose que la section efficace de diffusion ne dépend dans chacun des milieux de la cellule que du cosinus de l'angle formé par les directions avant et après le choc.

On multiplie par $\Omega_{\mathbf{x}}$ cette équation et l'on intègre successivement sur l'angle solide (4π) et le volume de la cellule. L'intégrale de

$\frac{\Omega_{\mathbf{x}} \times \delta_i}{\pi V_i (\rho_i^2 + \rho_i'^2)^{1/2}}$ sur (4π) est nulle. Compte tenu de la formule du libre parcours moyen de transport ($\lambda = \frac{1}{\Sigma_t - \bar{\mu} \Sigma_s}$), il vient :

$$\int_{\text{Scel}} dS \vec{n} \cdot \int_{(4\pi)} \Omega_{\mathbf{x}} \vec{\Omega} \psi d\Omega + \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \int_{(j)} dV \int_{(4\pi)} \Omega_{\mathbf{x}} \psi d\Omega = 0 \quad (\text{G.3})$$

où Scel représente la surface extérieure de la cellule.

En effet, il est facile de voir que l'on a ⁽¹⁾ :

$$\int_{(4\pi)} \Omega_{\mathbf{x}} d\Omega \int_{(4\pi)} \Sigma_s(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') \psi(\vec{\Omega}') d\Omega' = \bar{\mu} \Sigma_s \int_{(4\pi)} \Omega_{\mathbf{x}}' \psi(\vec{\Omega}') d\Omega'$$

(1)

Il est clair que l'on peut écrire :

$$\int_{(4\pi)} \Omega_{\mathbf{x}} d\Omega \int_{(4\pi)} \Sigma_s(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') \psi(\vec{\Omega}') d\Omega' = \vec{u} \cdot \int_{(4\pi)} \psi(\vec{\Omega}') d\Omega' \int_{(4\pi)} \vec{\Omega} \Sigma_s(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\Omega$$

en appelant $\vec{u}$ le vecteur unitaire porté par Ox . D'un autre côté, il est manifeste que :

$$\int_{(4\pi)} \vec{\Omega} \Sigma_s(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\Omega = \vec{\Omega}' \int_{(4\pi)} \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}' \Sigma_s(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\Omega$$

Le cosinus moyen de l'angle de diffusion admet pour définition :

$$\bar{\mu} = \frac{\int_{(4\pi)} \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}' \Sigma_s(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\Omega}{\int_{(4\pi)} \Sigma_s(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\Omega}$$

suite page suivante

L'intégrale sur la surface extérieure de la cellule du courant fictif

$$\int_{(4\pi)} \Omega_{\vec{x}} \vec{\Omega} \psi d\Omega \text{ est nulle. Cela tient à la périodicité du réseau (voir annexe$$

V). Par suite, compte tenu de la définition de la probabilité fictive P_{ij}^* , la relation (G.3) conduit à la relation (G.2).

Relations de conservation du second type

Le flux scalaire ϕ et le courant scalaire $\vec{g}_1$ créés par une source fictive localisée au milieu i sont liés par la relation de conservation classique qui s'écrit :

$$\text{div } \vec{g}_1 + \Sigma_a \phi = 0$$

lorsque la source est en $\Omega_{\vec{x}}$

$$\text{et qui s'écrit : } \text{div } \vec{g}_1 + \Sigma_a \phi = \frac{4 \pi}{V_i (\rho_i^2 + \rho_i'^2)^{1/2}}$$

lorsque la source est en x .

suite du renvoi de la page précédente.

Il s'ensuit que :

$$\int_{(4\pi)} \vec{\Omega} \Sigma_s(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\Omega = \vec{\Omega}' \bar{\mu} \Sigma_s$$

$$\text{avec } \Sigma_s = \int_{(4\pi)} \Sigma_s(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\Omega$$

En portant ce résultat dans la première relation (de ce renvoi), on obtient finalement :

$$\int_{(4\pi)} \Omega_x d\Omega \int_{(4\pi)} \Sigma_s(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') \psi(\vec{\Omega}') d\Omega' = \bar{\mu} \Sigma_s \int_{(4\pi)} \Omega'_x \psi(\vec{\Omega}') d\Omega'$$

On multiplie ces relations par $\mathbf{x}$ et on intègre sur tout le volume de la cellule. En vertu de l'égalité :

$$\mathbf{x} \operatorname{div} \vec{g}_1 = \operatorname{div} \mathbf{x} \vec{g}_1 - g_{1x} ,$$

où g_{1x} est la composante x du courant g_1 , on obtient respectivement, en désignant par ψ le flux angulaire :

$$\int_{\text{Scel}} \mathbf{x} \vec{g}_1 \cdot \vec{n} \, dS - \sum_j \int_{(j)} dV \int_{(4\pi)} \psi \Omega_{\mathbf{x}} \, d\Omega + \sum_j \Sigma_{aj} \int_{(j)} \mathbf{x} \, dV \int_{(4\pi)} \psi \, d\Omega = 0$$

et

$$\int_{\text{Scel}} \mathbf{x} \vec{g}_1 \cdot \vec{n} \, dS - \sum_j \int_{(j)} dV \int_{(4\pi)} \psi \Omega_{\mathbf{x}} \, d\Omega + \sum_j \Sigma_{aj} \int_{(j)} \mathbf{x} \, dV \int_{(4\pi)} \psi \, d\Omega = (\rho_1^2 + \rho_1'^2)^{\frac{1}{2}}$$

Compte tenu des définitions de la page 28 , ces relations peuvent encore s'écrire :

$$\int_{\text{Scel}} \mathbf{x} \vec{g}_1 \cdot \vec{n} \, dS - \sum_j \lambda_j P_{1j}^* + \sum_j (\rho_j^2 + \rho_j'^2)^{1/2} P_{1j}^* = 0 \quad (G.4)$$

$$\int_{\text{Scel}} \mathbf{x} \vec{g}_1 \cdot \vec{n} \, dS - \sum_j \lambda_j P_{1j}^* + \sum_j (\rho_j^2 + \rho_j'^2)^{1/2} P_{1j}^* = (\rho_1^2 + \rho_1'^2)^{1/2} \quad (G.5)$$

La relation (G.4) équivaut à la relation obtenue par BENOIST en E.7 de [12], en utilisant une méthode différente.

Seconde partie

Relations de réciprocité

Si l'on appelle $G(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}')$ le flux créé en $\vec{r}$ dans la direction $\vec{\Omega}$ par un neutron né en $\vec{r}'$ dans la direction $\vec{\Omega}'$, on peut écrire les probabilités fictives sous la forme d'intégrales quadruples :

$$P_{ij}^* = \frac{1}{\lambda_j} \int_{(j)} dr^3 \int_{(4\pi)} d\Omega \Omega_x \int_{(i)} dr'^3 \int_{(4\pi)} d\Omega' G(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}') \frac{3}{4\pi V_1} \Omega_x \Omega'_x \quad (G.6)$$

$$P_{ij}^* = \frac{1}{\lambda_j} \int_{(j)} dr^3 \int_{(4\pi)} d\Omega \int_{(i)} dr'^3 \int_{(4\pi)} d\Omega' G(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}') \frac{x' \Omega_x}{\pi V_1 (\rho_1^2 + \rho_1'^2)^{1/2}} \quad (G.7)$$

$$P_{ji}^* = \Sigma_{ai} \int_{(i)} dr'^3 \int_{(4\pi)} d\Omega' \int_{(j)} dr^3 \int_{(4\pi)} d\Omega G(\vec{r}', \vec{\Omega}', \vec{r}, \vec{\Omega}) \frac{3}{4\pi V_j} \Omega_x \frac{x'}{(\rho_1^2 + \rho_1'^2)^{1/2}} \quad (G.8)$$

$$P_{ji}^* = \Sigma_{aj} \int_{(j)} dr^3 \int_{(4\pi)} d\Omega \int_{(i)} dr'^3 \int_{(4\pi)} d\Omega' G(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}') \frac{x x'}{\pi V_1 (\rho_1^2 + \rho_1'^2)^{1/2} (\rho_j^2 + \rho_j'^2)^{1/2}} \quad (G.9)$$

Dans un réseau infini périodique, le théorème de réciprocité est applicable (cf. [15]) : on peut remplacer dans les intégrales précédentes $G(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}')$ par $G(\vec{r}', -\vec{\Omega}', \vec{r}, -\vec{\Omega})$.

On fait ensuite le changement de variables :

$$\vec{\omega} = -\vec{\Omega} \quad \vec{\omega}' = -\vec{\Omega}'$$

On obtient successivement :

$$P_{ij}^* = \frac{1}{\lambda_j} \int_{(i)} dr'^3 \int_{(4\pi)} d\omega' \int_{(j)} dr^3 \int_{(4\pi)} d\omega G(\vec{r}', \vec{\omega}', \vec{r}, \vec{\omega}) \frac{3}{4\pi V_1} \omega_{\vec{x}} \omega'_{\vec{x}} \quad (G.10)$$

$$P_{ij}^* = -\frac{1}{\lambda_j} \int_{(i)} dr'^3 \int_{(4\pi)} d\omega' \int_{(j)} dr^3 \int_{(4\pi)} d\omega G(\vec{r}', \vec{\omega}', \vec{r}, \vec{\omega}) \frac{\vec{x}' \cdot \vec{\omega}_{\vec{x}}}{\pi V_1 (\rho_1^2 + \rho_1'^2)^{1/2}} \quad (G.11)$$

$$P_{ij}^* = \sum_{aj} \int_{(i)} dr'^3 \int_{(4\pi)} d\omega' \int_{(j)} dr^3 \int_{(4\pi)} d\omega G(\vec{r}', \vec{\omega}', \vec{r}, \vec{\omega}) \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{V_1 (\rho_1^2 + \rho_1'^2)^{1/2} (\rho_j^2 + \rho_j'^2)^{1/2}} \quad (G.12)$$

Si l'on compare (G.10) à (G.6), (G.11) à (G.8) et (G.12) à (G.9), on voit immédiatement qu'on a :

$$\lambda_j V_1 P_{ij}^* = \lambda_1 V_j P_{ji}^* \quad (G.13)$$

$$\sum_{ai} \lambda_j V_1 P_{ij}^* = -\frac{4}{3} V_j P_{ji}^* \quad (G.14)$$

$$\sum_{ai} V_1 P_{ij}^* = \sum_{aj} V_j P_{ji}^* \quad (G.15)$$

ANNEXE H

EXPRESSION DES PARAMETRES HETEROGENES DIPOLAIRES

On se limite au schéma monocinétique. Les notations et conventions adoptées sont celles du chapitre II.

H.1 Définitions annexes et calculs préliminaires

On considère une cellule de rayon b et de hauteur infinie au centre de laquelle se trouve un canal composé de deux milieux coaxiaux: un barreau plein (indice u) et une cavité circulaire (indice c). Dans le plan d'une section droite de la cellule, on choisit un axe de référence Ox . On appelle α l'angle qui amène, dans ce plan, le rayon vecteur $\vec{\rho}$ partant du centre du canal sur Ox . On désigne par Ω_x la composante x du vecteur unitaire $\vec{\Omega}$ de la direction de propagation des neutrons.

Soient β_{ub} le coefficient par lequel il faut multiplier $K_m \Delta_1(K_m \rho) \cos \alpha$ pour obtenir⁽¹⁾, dans le modérateur de la cellule, l'expression asymptotique du flux créé par une source anisotrope d'intensité $\frac{\Omega_x}{4\pi}$ uniformément répartie dans le barreau ;

β_{cb} l'analogue de β_{ub} pour une source anisotrope d'intensité $\frac{\Omega_x}{4\pi}$ localisée à la cavité ;

θ_{ub} l'analogue de β_{ub} pour une source isotrope d'intensité $\frac{x}{4\pi}$ localisée au barreau ;

β_u le coefficient par lequel il faut multiplier $K_m K_1(K_m \rho) \cos \alpha$ pour obtenir, dans le modérateur de la cellule, lorsque b est infini, l'expression asymptotique du flux créé par une source anisotrope d'intensité $\frac{\Omega_x}{4\pi}$ répartie uniformément dans le barreau ;

(1) La fonction Δ_1 est celle qu'AMOUYAL et BENOIST ont définie dans [10]. Elle s'écrit : $\Delta_1(K_m \rho) = I_1(K_m b) K_1(K_m \rho) - K_1(K_m b) I_1(K_m \rho)$.

β_c l'analogue de β_u pour une source anisotrope d'intensité $\frac{\Omega_x}{4\pi}$ localisée à la cavité.

Calcul de β_{ib} (i pouvant être u ou c)

Le flux créé par la source d'intensité $\frac{3}{4\pi V_i} \Omega_x$ localisée au milieu i inclus dans le canal est lié aux probabilités fictives par la relation de conservation (II.B.3.3). Soit $\vec{W}$ le vecteur unitaire porté par Ox. Si l'on assimile le flux, dans le modérateur, à sa partie asymptotique et si l'on admet la loi de FICK à la frontière de la cellule, cette relation donne (compte tenu de la définition des probabilités de capture "en x") :

$$\left[-\frac{\Sigma_{am}}{K_m^2} b^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \cos \alpha \left(\vec{n} \cdot \text{grad} (K_m \Delta_1(K_m \rho)) \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{W}}{\rho} \right) + \Sigma_{am} \int_c^b \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\alpha \cos^2 \alpha K_m \Delta_1(K_m \rho) \right] \frac{3}{V_i} \beta_{ib} =$$

$$\left((\lambda_m P_{im_b}^* + \lambda_c P_{ic_b}^* + \lambda_u P_{iu_b}^*) - a P_{iu_b}^* \right) \quad (H.1)$$

L'indice b placé en bas et à droite du symbole représentant une probabilité indique simplement que cette probabilité a été définie en cellule de rayon fini b.

Il est facile de voir que :

$$\text{grad} \left(\Delta_1(K_m \rho) \frac{\vec{\rho}}{\rho} \cdot \vec{W} \right) = \frac{\Delta_1(K_m \rho)}{\rho} \vec{W} - K_m \frac{\Delta_2(K_m \rho)}{\rho^2} (\vec{\rho} \cdot \vec{W}) \vec{\rho}$$

$$\int_c^b d\rho \rho^2 \Delta_1(K_m \rho) = \left[-\rho^2 \frac{\Delta_2(K_m \rho)}{K_m} \right]_c^b$$

avec $\Delta_2(K_m \rho) = I_1(K_m b) K_2(K_m \rho) + K_1(K_m b) I_2(K_m \rho)$

D'après (II.B.3.1), on a :

$$P_{im_b}^* = 1 - P_{iu_b}^*$$

De (H.1) on tire, par suite :

$$\beta_{ib} = \frac{V_i (\lambda_m + (\lambda_u - \lambda_m) P_{iu_b}^* + \lambda_c P_{ic_b}^* - a P_{i\bar{u}_b}^*)}{3 \pi c^2 \Sigma_{am} \Delta_2(K_m c)}$$

soit

$$\beta_{ub} = \frac{V_u (\lambda_m + (\lambda_u - \lambda_m) P_{uu_b}^* + \lambda_c P_{uc_b}^* - a P_{u\bar{u}_b}^*)}{3 \pi c^2 \Sigma_{am} \Delta_2(K_m c)} \quad (H.2)$$

$$\beta_{cb} = \frac{V_c (\lambda_m + (\lambda_u - \lambda_m) P_{cu_b}^* + \lambda_c P_{cc_b}^* - a P_{c\bar{u}_b}^*)}{3 \pi c^2 \Sigma_{am} \Delta_2(K_m c)} \quad (H.3)$$

Formule de θ_{ub}

Le paramètre θ_{ub} se calcule comme β_{ib} . Il suffit de remplacer respectivement les relations (II.B.3.3) et (II.B.3.1) par les relations (II.B.3.4) et (II.B.3.2). Cela donne :

$$\theta_{ub} = \frac{V_u a \left[(\lambda_u - \lambda_m) P_{\bar{u}u_b}^* + \lambda_c P_{\bar{u}c_b}^* + a - a P_{\bar{u}\bar{u}_b}^* \right]}{4 \pi c^2 \Sigma_{am} \Delta_2(K_m c)} \quad (H.4)$$

Formules de β_u et de β_c

La transposition du calcul de β_{ib} dans le cas où la cellule est de rayon infini est immédiate. Les formules de β_u et de β_c s'écrivent :

$$\beta_u = \frac{V_u \left(\lambda_m + (\lambda_u - \lambda_m) P_{uu}^* + \lambda_c P_{uc}^* - a P_{uu}^* \right)}{3 \pi c^2 \sum_{am} K_2(K_m c)} \quad (H.5)$$

$$\beta_c = \frac{V_c \left(\lambda_m + (\lambda_u - \lambda_m) P_{cu}^* + \lambda_c P_{cc}^* - a P_{cu}^* \right)}{3 \pi c^2 \sum_{am} K_2(K_m c)} \quad (H.6)$$

On montrerait facilement, en reprenant le problème traité au chapitre II § B.3c, avec une source localisée au barreau d'intensité $\frac{\Omega x}{4\pi}$ au lieu de $\frac{x}{4\pi}$, que (voir (II.B.3.27)) :

$$\beta_{ub} = \frac{\beta_u}{\left(1 - \tilde{\beta} \frac{K_m^2}{2} S_o \right) I_1(K_m b)} \quad (H.7)$$

En remplaçant dans (H.2) et (H.5) les probabilités par leurs valeurs tirées du formulaire proposé par BENOIST dans [12], on pourrait essayer de déduire de (H.7) l'expression de $\tilde{\beta}$. On trouverait (sauf dans le cas du canal vide) une expression dépendant de b ce qui est contraire aux prévisions. On peut montrer que cela tient à la nature des approximations faites dans [12] (§ D.5 et F.1) sur la distribution angulaire des neutrons retournant dans le canal après avoir voyagé dans le modérateur. Cela nous amène à reconsidérer le problème du calcul de l'opacité (fictive) des différents milieux du canal.

H.2 Définition et calcul de l'opacité des différents milieux du canal

Soient S_c la surface extérieure du canal ,

$\vec{n}_1$ la normale à S_c orientée vers l'intérieur du canal ,

$(2\pi)_-$ l'angle solide des directions $\vec{\Omega}$ formant avec $\vec{n}_1$ un angle inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

Avec BENOIST (cf. [12]) nous dirons que N neutrons entrent fictivement⁽¹⁾ dans le canal avec l'intensité angulaire ψ lorsque l'intégrale

$$\int_{S_c} dS \vec{n}_1 \cdot \int_{(2\pi)_-} \vec{\Omega} \Omega_x \psi d\Omega \text{ vaut } N.$$

Dans ce paragraphe, nous ne nous intéresserons qu'aux neutrons qui ont été créés par une source antisymétrique⁽²⁾ localisée au canal. Si v est le flux engendré par cette source dans la cellule, le nombre de neutrons qui entrent fictivement⁽¹⁾ dans le canal après avoir voyagé dans le modérateur est donc égal à :

$$Sg_{1-} = \int_{S_c} dS \vec{n}_1 \cdot \int_{(2\pi)_-} \vec{\Omega} \Omega_x v(\vec{\rho}_s, \vec{\Omega}) d\Omega$$

où $\vec{\rho}_s$ est le point de la surface S_c d'où part la normale $\vec{n}_1$.

Nous donnerons le nom de "courant fictif entrant dans le canal" à Sg_{1-} et de "courant fictif sortant du canal" à l'intégrale :

$$Sg_{1+} = \int_{S_c} dS \vec{n}_e \cdot \int_{(2\pi)_+} \vec{\Omega} \Omega_x v(\vec{\rho}_s, \vec{\Omega}) d\Omega$$

dans laquelle $\vec{n}_e$ est la normale extérieure à S_c au point $\vec{\rho}_s$ et $(2\pi)_+$ l'angle solide des directions $\vec{\Omega}$ formant avec $\vec{n}_e$ un angle inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

(1) *relativement à la direction Ox.*

(2) *suyant la direction Ox.*

On appelle opacité fictive du milieu j contenu dans le canal, la probabilité $\Gamma_j^{'+}$ pour un neutron entrant fictivement dans le canal après avoir voyagé dans le modérateur d'être capturé fictivement dans j sans être retourné dans le modérateur, et opacité "en x " du milieu j contenu dans le canal, la probabilité $\Gamma_j^{'+}$ pour le même neutron d'être capturé "en x " dans j sans être retourné dans le modérateur.

En toute rigueur $\Gamma_j^{'+}$ et $\Gamma_j^{'+}$ dépendent de la structure - angulaire et spatiale - de la source qui a créé le neutron. Remarquons cependant que si l'on suppose le choc isotrope et si l'on assimile le flux à sa partie asymptotique dans le modérateur⁽¹⁾, $\Gamma_j^{'+}$ et $\Gamma_j^{'+}$ ne relèvent plus que des caractéristiques neutroniques et géométriques de la cellule. En effet, le flux angulaire entrant dans le canal, au point $\vec{\rho}_s$ de S_c et dans la direction $\vec{\Omega}$, est alors donné par l'expression (théorie intégrale du transport, voir [14]) :

$$v^-(\vec{\rho}_s, \vec{\Omega}) = \beta \int_0^\infty dR_m e^{-\Sigma_{tm} R_m} \frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} K_m \Delta_1(K_m \rho) \cos \alpha \quad (H.8)$$

où $\vec{\rho}$ est ici la projection de $\vec{\rho}_s - R_m \vec{\Omega}$ dans le plan de section droite de la cellule et β un coefficient multiplicatif indépendant de $\vec{\Omega}$. La présence d'une borne infinie dans cette intégrale alors que les dimensions de la cellule sont finies ne tire pas à conséquence. En effet, l'intégrand devient négligeable pour une valeur de R_m de l'ordre de un ou deux libres parcours.

Cette remarque va nous permettre d'établir des relations qui nous serviront à calculer les diverses opacités.

Compte tenu des relations de réciprocité (II.B.3.5), (II.B.3.6) et (II.B.3.7), on a :

(1) En admettant cette hypothèse, on reste cohérent avec la façon dont on a tiré parti des probabilités fictives pour établir les formules des paramètres dipolaires.

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_u - \lambda_m) P_{uu_b}^* + \lambda_c P_{uc_b}^* - a P_{u\bar{u}_b}^* \\
 & = (\lambda_u - \lambda_m) P_{uu_b}^* + \frac{V_c \lambda_u}{V_u} P_{cu_b}^* + \frac{3}{4} a \Sigma_{au} \lambda_u P_{u\bar{u}_b}^* \quad (H.9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_u - \lambda_m) P_{cu_b}^* + \lambda_c P_{cc_b}^* - a P_{c\bar{u}_b}^* \\
 & = \lambda_c \frac{V_u}{V_c \lambda_u} \left((\lambda_u - \lambda_m) P_{uc_b}^* + \frac{V_c \lambda_u}{V_u} P_{cc_b}^* + \frac{3}{4} a \Sigma_{au} \lambda_u P_{u\bar{u}_b}^* \right) \quad (H.10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_u - \lambda_m) P_{u\bar{u}_b}^* + \lambda_c P_{u\bar{c}_b}^* - a P_{u\bar{u}_b}^* \\
 & = - \frac{4}{3 \Sigma_{au} \lambda_u} \left((\lambda_u - \lambda_m) P_{u\bar{u}_b}^* + \frac{V_c \lambda_u}{V_u} P_{c\bar{u}_b}^* + \frac{3}{4} a \Sigma_{au} \lambda_u P_{u\bar{u}_b}^* \right) \quad (H.11)
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'on peut calculer la valeur de l'expression (H.2) de β_{ub} (respectivement (H.3) de β_{cb} et (H.4) de θ_{ub}) de deux manières différentes :

1 - soit en ajoutant la capture fictive dans le milieu u, multipliée par $(\lambda_u - \lambda_m)$, la capture fictive dans le milieu c, multipliée par λ_c , et la capture "en x" dans le milieu u, multipliée par - a, des neutrons créés par la source d'intensité $\frac{3}{4\pi V_u} \Omega_x$ (respectivement $\frac{3}{4\pi V_c} \Omega_x$ et $\frac{x}{\pi V_u a}$) localisée au milieu u (respectivement c et u).

2 - soit en calculant la capture fictive (respectivement fictive et "en x") dans le milieu u (respectivement c et u) des neutrons engendrés par la source ayant pour intensité dans le milieu u :

$$(\lambda_u - \lambda_m) \frac{3}{4\pi V_u} \Omega_x + \frac{3}{4\pi V_u} \Sigma_{au} \lambda_u x$$

dans le milieu c :

$$\frac{3}{4\pi V_u} \lambda_u \Omega_x$$

Le flux créé par $\mathcal{V}$ dans le modérateur de la cellule a évidemment pour expression asymptotique :

$$\mathcal{F}_{as}(\vec{\rho}) = 3 \frac{\lambda_u}{V_u} \beta_{ob} K_m \Delta_1(K_m \rho) \cos \alpha \quad (H.12)$$

On a posé :

$$\beta_{ob} = \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u}\right) \beta_{ub} + \beta_{cb} + \Sigma_{au} \theta_{ub} \quad (H.13)$$

Chaque probabilité $P_{ij_b}^*$ - nous considérons ici la probabilité fictive en son sens le plus large, les indices i et j pouvant être barrés - se compose d'une part de la contribution des neutrons capturés dans j sans avoir jamais pénétré dans le modérateur, soit P_{ij}^+ , et d'autre part de la contribution des neutrons capturés dans j après avoir voyagé une ou plusieurs fois dans le modérateur. En convenant de désigner désormais par Sg_{1-} le courant fictif entrant dans le canal lorsque l'expression asymptotique du flux dans le modérateur a pour intensité $K_m \Delta_1(K_m \rho) \cos \alpha$, on peut écrire :

$$P_{ij_b}^* = P_{ij}^+ + \frac{3}{V_1} \beta_{ib} Sg_{1-} \Gamma_j'^+ \quad (H.14)$$

$$P_{i\bar{u}_b}^* = P_{i\bar{u}}^+ + \frac{3}{V_1} \beta_{ib} Sg_{1-} \Gamma_{\bar{u}}'^+ \quad (H.15)$$

$$P_{\bar{u}j_b}^* = P_{\bar{u}j}^+ + \frac{4}{V_u a} \theta_{ub} Sg_{1-} \Gamma_j'^+ \quad (H.16)$$

$$P_{\bar{u}\bar{u}_b}^* = P_{\bar{u}\bar{u}}^+ + \frac{4}{V_u a} \theta_{ub} Sg_{1-} \Gamma_{\bar{u}}'^+ \quad (H.17)$$

Portons ces valeurs dans (H.9), (H.10) et (H.11). Il vient, après introduction de β_{ob} :

$$(\lambda_u - \lambda_m) P_{uu}^+ + \lambda_c P_{uc}^+ - a P_{u\bar{u}}^+ + \frac{3}{V_u} \lambda_u \beta_{ub} S_{g1-} \Gamma'^+$$

$$= (\lambda_u - \lambda_m) P_{uu}^+ + \frac{V_c \lambda_u}{V_u} P_{cu}^+ + \frac{3}{4} a \Sigma_{au} \lambda_u P_{u\bar{u}}^+ + \frac{3}{V_u} \lambda_u \beta_{ob} S_{g1-} \Gamma_u'^+$$

$$(\lambda_u - \lambda_m) P_{cu}^+ + \lambda_c P_{cc}^+ - a P_{c\bar{u}}^+ + \frac{3 \lambda_u}{V_c} \beta_{cb} S_{g1-} \Gamma'^+$$

$$= \lambda_c \frac{V_u}{V_c \lambda_u} \left\{ (\lambda_u - \lambda_m) P_{uc}^+ + \frac{V_c \lambda_u}{V_u} P_{cc}^+ + \frac{3}{4} a \Sigma_{au} \lambda_u P_{u\bar{c}}^+ + \frac{3}{V_u} \lambda_u \beta_{ob} S_{g1-} \Gamma_c'^+ \right\}$$

$$(\lambda_u - \lambda_m) P_{u\bar{u}}^+ + \lambda_c P_{u\bar{c}}^+ - a P_{u\bar{u}}^+ + \frac{4 \lambda_u}{V_u a} \theta_{ub} S_{g1-} \Gamma'^+$$

$$= - \frac{4}{3 \Sigma_{au} \lambda_u} \left\{ (\lambda_u - \lambda_m) P_{u\bar{u}}^+ + \frac{V_c \lambda_u}{V_u} P_{c\bar{u}}^+ + \frac{3}{4} a \Sigma_{au} \lambda_u P_{u\bar{u}}^+ + \frac{3 \lambda_u}{V_u} \beta_{ob} S_{g1-} \Gamma_{\bar{u}}'^+ \right\}$$

On a posé :

$$\Gamma'^+ = \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u}\right) \Gamma_u'^+ + \frac{\lambda_c}{\lambda_u} \Gamma_c'^+ - \frac{a}{\lambda_u} \Gamma_{\bar{u}}'^+$$

Comme les probabilités P_{ij}^+ satisfont également aux relations de réciprocité⁽¹⁾ (II.B.3.5), (II.B.3.6) et (II.B.3.7), on en déduit que :

$$\frac{\Gamma_u'^+}{\Gamma_c'^+} = \frac{\beta_{ub}}{\beta_{ob}} \quad (\text{H.18})$$

$$\frac{\frac{\lambda_c}{\lambda_u} \Gamma_c'^+}{\Gamma_u'^+} = \frac{\beta_{cb}}{\beta_{ob}} \quad (\text{H.19})$$

$$- \frac{a \Gamma_u'^+}{\Sigma_{au} \lambda_u \Gamma_u'^+} = \frac{\theta_{ub}}{\beta_{ob}} \quad (\text{H.20})$$

En remplaçant les numérateurs des formules (H.2) de β_{ub} , (H.3) de β_{cb} et (H.4) de θ_{ub} par leurs valeurs respectivement tirées de (H.9), (H.10) et (H.11), on obtient, compte tenu de (H.14), (H.15), (H.16) et (H.17) :

$$\beta_{ub} = \frac{V_u}{3 \pi c^2 \Sigma_{am} \Delta_2(K_m c)} \left(P_u^+ + \frac{3 \lambda_u}{V_u} \beta_{ob} Sg_{1-} \Gamma_u'^+ \right) \quad (\text{H.21})$$

$$\beta_{cb} = \frac{\frac{\lambda_c}{\lambda_u} V_u}{3 \pi c^2 \Sigma_{am} \Delta_2(K_m c)} \left(P_c^+ + \frac{3 \lambda_u}{V_u} \beta_{ob} Sg_{1-} \Gamma_c'^+ \right) \quad (\text{H.22})$$

$$\theta_{ub} = - \frac{V_u a}{\Sigma_{au} \lambda_u 3 \pi c^2 \Sigma_{am} \Delta_2(K_m c)} \left(P_u^+ + \frac{3 \lambda_u}{V_u} \beta_{ob} Sg_{1-} \Gamma_u'^+ \right) \quad (\text{H.23})$$

(1) Le théorème de réciprocité est applicable à l'intérieur du canal lorsqu'on suppose que le modérateur ne renvoie pas les neutrons.

avec

$$P_u^+ = \lambda_m + (\lambda_u - \lambda_m) P_{uu}^+ + \frac{V_c \lambda_u}{V_u} P_{cu}^+ + \frac{3}{4} a \Sigma_{au} \lambda_u P_{\bar{u}u}^+ \quad (H.24)$$

$$P_c^+ = \frac{V_c \lambda_u}{V_u \lambda_c} \lambda_m + (\lambda_u - \lambda_m) P_{uc}^+ + \frac{V_c \lambda_u}{V_u} P_{cc}^+ + \frac{3}{4} a \Sigma_{au} \lambda_u P_{\bar{u}c}^+ \quad (H.25)$$

$$P_{\bar{u}}^+ = -\frac{3}{4} a \Sigma_{au} \lambda_u + (\lambda_u - \lambda_m) P_{u\bar{u}}^+ + \frac{V_c \lambda_u}{V_u} P_{c\bar{u}}^+ + \frac{3}{4} a \Sigma_{au} \lambda_u P_{\bar{u}\bar{u}}^+ \quad (H.26)$$

Substituant dans (H.13), on trouve :

$$\beta_{ob} = \frac{V_u}{3 \pi c^2 \Sigma_{am} \Delta_2(K_m c)} \left(P^+ + \frac{3 \lambda_u}{V_u} \beta_{ob} S_{g1-} \Gamma'^+ \right) \quad (H.27)$$

où

$$P^+ = P_u^+ \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) + \frac{\lambda_c}{\lambda_u} P_c^+ - \frac{a}{\lambda_u} P_{\bar{u}}^+ \quad (H.28)$$

Si l'on compare (H.27) successivement à (H.21), à (H.22) et à (H.23), en se référant à (H.18), (H.19) et (H.20), on voit que :

$$\frac{\Gamma_{u\bar{u}}'^+}{\Gamma_{\bar{u}\bar{u}}'^+} = \frac{P_u^+}{P^+}$$

$$\frac{\Gamma_{c\bar{u}}'^+}{\Gamma_{\bar{u}\bar{u}}'^+} = \frac{P_c^+}{P^+}$$

$$\frac{\Gamma_{\bar{u}\bar{u}}'^+}{\Gamma_{\bar{u}\bar{u}}'^+} = \frac{P_{\bar{u}}^+}{P^+}$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{\Gamma_u^{'+}}{P_u^+} = \frac{\Gamma_c^{'+}}{P_c^+} = \frac{\Gamma_{\bar{u}}^{'+}}{P_{\bar{u}}^+} = \frac{\Gamma^{'+}}{P^+} \quad (\text{H.29})$$

et que (cf. (H.18), (H.19) et (H.20)) :

$$\frac{\beta_{ub}}{\beta_{ob}} = \frac{P_u^+}{P^+} \quad (\text{H.30 A})$$

$$\frac{\beta_{cb}}{\beta_{ob}} = \frac{\lambda_c P_c^+}{\lambda_u P^+} \quad (\text{H.30 B})$$

$$\frac{\theta_{ub}}{\beta_{ob}} = - \frac{a}{\sum_{au} \lambda_u} \frac{P_{\bar{u}}^+}{P^+} \quad (\text{H.30 C})$$

Les rapports $\frac{\beta_{ub}}{\beta_{ob}}$, $\frac{\beta_{cb}}{\beta_{ob}}$ et $\frac{\theta_{ub}}{\beta_{ob}}$ ont donc chacun une valeur indépendante de b . Or il est facile de voir, en utilisant les formules établies au paragraphe H.1 de cette annexe et la formule (II.B.3.9) que :

$$\left. \begin{aligned} \beta_u &= \lim_{b \rightarrow \infty} I_1(K_m b) \beta_{ub} \\ \beta_c &= \lim_{b \rightarrow \infty} I_1(K_m b) \beta_{cb} \\ \theta_u &= \lim_{b \rightarrow \infty} I_1(K_m b) \theta_{ub} \end{aligned} \right\} \quad (\text{H.31})$$

Par suite, si l'on pose :

$$\beta_o = \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u}\right) \beta_u + \beta_c + \sum_{au} \theta_u \quad (\text{H.32})$$

on a (voir (H.13)) :

$$\beta_o = \lim_{b \rightarrow \infty} I_1(K_m b) \beta_{ob} \quad (H.33)$$

et

$$\frac{\beta_u}{\beta_o} = \frac{P_u^+}{P^+} \quad (H.34 A)$$

$$\frac{\beta_c}{\beta_o} = \frac{\lambda_c P_c^+}{\lambda_u P^+} \quad (H.34 B)$$

$$\frac{\theta_u}{\beta_o} = - \frac{a P_u^+}{\sum_{au} \lambda_u P^+} \quad (H.34 C)$$

On en déduit l'égalité :

$$\frac{\beta_{ub}}{\beta_u} = \frac{\beta_{cb}}{\beta_c} = \frac{\theta_{ub}}{\theta_u} = \frac{\beta_{ob}}{\beta_o} \quad (H.35)$$

Ce résultat explique pourquoi des relations similaires telles que (II.B.3.27) et (H.7) puissent exister simultanément. On en conclut que l'on doit avoir :

$$\frac{\beta_{ob}}{\beta_o} = \frac{1}{(1 - \gamma \frac{K_m^2}{2} S_o) I_1(K_m b)} \quad (H.36)$$

avec

$$S_o = \frac{K_1(K_m b)}{I_1(K_m b)}$$

On démontre en annexe W les identités suivantes :

$$P_u^+ = \frac{\pi c^2}{2 V_u} \lambda_u \lambda_m \left(\frac{\Gamma_{ux}^{' +}}{\lambda_m} + \frac{9}{8c} \Gamma_{u\Omega_x}^{' +} \right) \quad (H.37)$$

$$P_c^+ = \frac{\pi c^2}{2 V_u} \lambda_u \lambda_m \left(\frac{\Gamma_{cx}^{' +}}{\lambda_m} + \frac{9}{8c} \Gamma_{c\Omega_x}^{' +} \right) \quad (H.38)$$

$$P_{\bar{u}}^+ = \frac{\pi c^2}{2 V_u} \lambda_u \lambda_m \left(\frac{\Gamma_{\bar{u}x}^{' +}}{\lambda_m} + \frac{9}{8c} \Gamma_{\bar{u}\Omega_x}^{' +} \right) \quad (H.39)$$

dans lesquelles :

$\Gamma_{jx}^{' +}$ (respectivement $\Gamma_{\bar{j}x}^{' +}$) représente la probabilité pour un neutron entrant fictivement dans le canal avec l'intensité angulaire $-\frac{3 \cos \alpha}{2 \pi^2 c}$, d'être capturé fictivement (respectivement "en x") dans j sans être retourné dans le modérateur ,

et $\Gamma_{j\Omega_x}^{' +}$ (respectivement $\Gamma_{\bar{j}\Omega_x}^{' +}$) la probabilité pour un neutron entrant fictivement dans le canal avec l'intensité angulaire $\frac{4}{3 \pi^2 c} \Omega_x$, d'être également capturé fictivement (respectivement "en x") dans j sans être retourné dans le modérateur.

De (H.29), (H.37), (H.38) et (H.39), il résulte que :

$$\frac{\Gamma_u^{' +}}{\frac{1}{\lambda_m} \Gamma_{ux}^{' +} + \frac{9}{8c} \Gamma_{u\Omega_x}^{' +}} = \frac{\Gamma_c^{' +}}{\frac{1}{\lambda_m} \Gamma_{cx}^{' +} + \frac{9}{8c} \Gamma_{c\Omega_x}^{' +}} = \frac{\Gamma_{\bar{u}}^{' +}}{\frac{1}{\lambda_m} \Gamma_{\bar{u}x}^{' +} + \frac{9}{8c} \Gamma_{\bar{u}\Omega_x}^{' +}} = \frac{1}{C} \quad (H.40)$$

où C est une constante à déterminer.

Tout se passe comme si la distribution angulaire entrant dans le canal des neutrons ayant voyagé dans le modérateur était proportionnelle à

$$- \frac{3}{2 \pi^2 c} \left(\frac{\cos \alpha}{\lambda_m} - \frac{\Omega_x}{c} \right).$$

Il reste à trouver la valeur de la constante de proportionnalité.

En s'inspirant des calculs effectués en annexe G, il est facile de voir que l'on a :

$$\Gamma_U'^+ + \Gamma_S'^+ = 1 \quad (H.41)$$

où $\Gamma_S'^+$ désigne la probabilité pour un neutron entré fictivement dans le canal après avoir voyagé dans le modérateur de sortir fictivement du canal. On dit que N neutrons sortent fictivement⁽¹⁾ du canal avec l'intensité angulaire ψ lorsque l'intégrale $\int_{S_c} dS \vec{n}_S \cdot \int_{(2\pi)_+} \vec{\Omega} \Omega_x \psi d\Omega$ vaut N.

Si l'on avait envisagé le calcul du coefficient θ_{sb} par lequel il faut multiplier $K_m \Delta_1(K_m \rho) \cos \alpha$ pour obtenir l'expression asymptotique du flux créé dans le modérateur de la cellule par la source entrante dans le canal d'intensité $-\frac{6 \cos \alpha}{\pi^2 c}$, il est clair que l'on aurait été amené à démontrer l'égalité :

$$\frac{\Gamma_S'^+}{\frac{1}{\lambda_m} \Gamma_{sx}' + \frac{9}{8c} \Gamma_{s\Omega_x}' + \frac{1}{c}} = \frac{1}{c} \quad (H.42)$$

dans laquelle Γ_{sx}' représente la probabilité pour un neutron entrant fictivement dans le canal avec l'intensité angulaire $-\frac{3 \cos \alpha}{2 \pi^2 c}$ d'en sortir fictivement et $\Gamma_{s\Omega_x}'$ la même probabilité pour un neutron entrant fictivement dans le canal avec l'intensité angulaire $\frac{4}{3 \pi^2 c} \Omega_x$.

⁽¹⁾ relativement à la direction Ox.

On a évidemment :

$$\Gamma_{ux}^{' +} + \Gamma_{sx}^{' +} = 1 \quad (H.43)$$

et

$$\Gamma_{u\Omega_x}^{' +} + \Gamma_{s\Omega_x}^{' +} = 1 \quad (H.44)$$

Remplaçons dans (H.41), $\Gamma_U^{' +}$ et $\Gamma_S^{' +}$ par leurs valeurs respectivement tirées de (H.40) et (H.42). Compte tenu de (H.43) et (H.44), il vient :

$$C = \frac{1}{\lambda_m} + \frac{9}{8c} \quad (H.45)$$

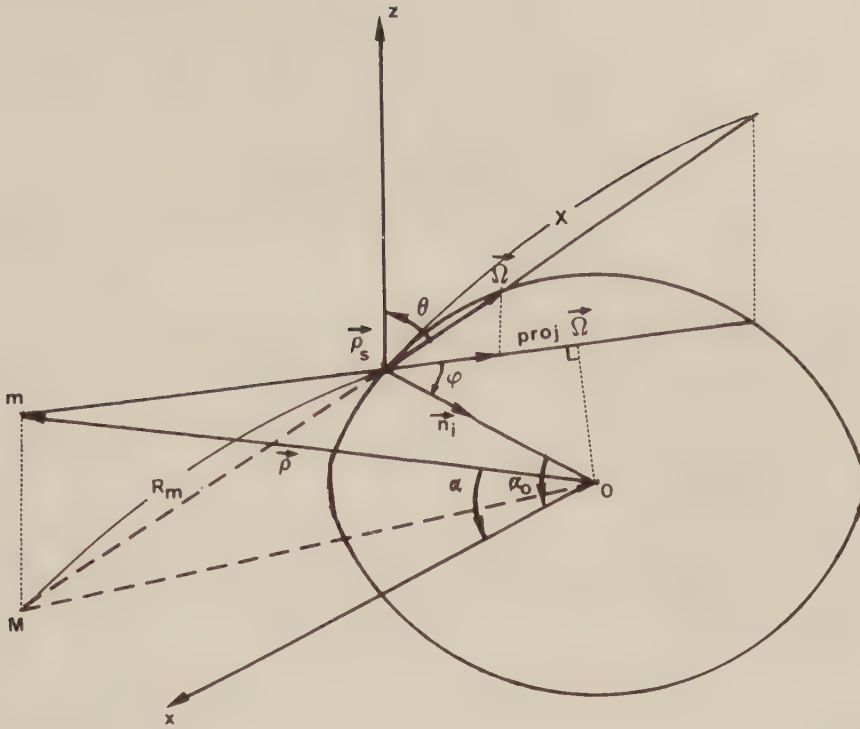
H.3 Calcul du courant fictif Sg_{1-}

En vertu des hypothèses et conventions adoptées au paragraphe H.2, Sg_{1-} a pour valeur :

$$Sg_{1-} = \frac{K_m \Sigma_{sm}}{4\pi} \int_{S_c} dS \vec{n}_i \cdot \int_{(2\pi)_-} d\Omega \vec{\Omega} \cdot \Omega_x \int_0^\infty dR_m e^{-\Sigma_{tm} R_m} \Delta_1(K_m \rho) \cos \alpha \quad (H.46)$$

Soient (voir figure) θ l'angle qui amène $\vec{\Omega}$ sur l'axe du canal ;
 φ l'angle qui amène sur $\vec{n}_i$ la projection de $\vec{\Omega}$ dans le plan de section droite de la cellule ;
 α_0 l'angle qui amène $-\vec{n}_i$ sur Ox .

On a :



$$\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_i = \cos \varphi \sin \theta$$

$$\Omega_x = \cos (\varphi + \alpha_0 + \pi) \sin \theta$$

$$R_m = \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2 \sin^2 \varphi} - c \cos \varphi}{\sin \theta}$$

et $\cos \alpha = \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2 \sin^2 \varphi} \cos (\varphi + \alpha_0) + c \sin \varphi \sin (\varphi + \alpha_0)}{\rho}$

par suite (H.46) s'écrit :

$$S_{g1-} = -\frac{K_m \Sigma_{sm}}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^2(\varphi + \alpha_0) \cos \varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin^2 \theta \int_c^{\infty} d\rho e^{-\Sigma_{tm} \frac{(\sqrt{\rho^2 - c^2 \sin^2 \varphi} - c \cos \varphi)}{\sin \theta}} \Delta_1(K_m \rho)$$

car

$$d R_m = \frac{\rho \, d\rho}{\sin \theta \sqrt{\rho^2 - c^2 \sin^2 \varphi}}$$

et

$$\int_0^{2\pi} d\alpha_0 \cos(\varphi + \alpha_0) \sin(\varphi + \alpha_0) = 0$$

Après quelques arrangements, il vient :

$$Sg_{1-} = -\frac{K_m}{\lambda_m} c \int_c^\infty d\rho \Delta_1(K_m \rho) f'(\rho, \Sigma_{tm}, c) \quad (H.47)$$

avec

$$f'(\rho, \Sigma_{tm}, c) = \Sigma_{sm} \lambda_m \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos \varphi \epsilon_2(\Sigma_{tm} (\sqrt{\rho^2 - c^2 \sin^2 \varphi} - c \cos \varphi)) \quad (H.48)$$

On désigne par ϵ_2 la fonction de BESSEL intégrale de BICKLEY et NAYLER [17] d'ordre 3 :

$$\epsilon_2(x) = Ki_3(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^2 \theta e^{-\frac{x}{\sin \theta}}$$

H.4 Dérivation d'une formule différente pour C

La formule (H.45) ne fait intervenir ni les données neutroniques, ni les données géométriques du barreau. Il est par conséquent logique de penser que la valeur de C calculée dans le cas du canal vide au moyen de la relation :

$$\frac{1}{C} = \frac{\Gamma_c'^+}{\frac{1}{\lambda_m} \Gamma_{c\Omega_x}'^+ + \frac{9}{8c} \Gamma_{c\Omega_x}'^+}$$

doit coïncider avec celle que donne (H.45).

Il est facile de voir en s'inspirant du calcul de Sg_{1-} que lorsque le canal est vide⁽¹⁾ :

$$\Gamma_c'^+ = 2 \frac{c}{\lambda_c} \frac{\int_c^\infty d\rho \Delta_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c)}{\int_c^\infty d\rho \Delta_1(K_m \rho) f'(\rho, \Sigma_{tm}, c)}$$

avec :

$$f(\rho, \Sigma_{tm}, c) = \lambda_m \Sigma_{sm} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^2 \varphi \varepsilon_1(\Sigma_{tm} (\sqrt{\rho^2 - c^2 \sin^2 \varphi} - c \cos \varphi))$$

(H.49)

et

$$\varepsilon_1(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta e^{-\frac{x}{\sin \theta}}$$

On reconnaît en ε_1 la fonction de BESSEL intégrale de BICKLEY et NAYLER d'ordre deux (cf. [17]).

Par ailleurs BENOIST a montré que dans ce cas (cf. [12] § F.1) :

$$\Gamma_{cx}'^+ = 2 \frac{c}{\lambda_c}$$

$$\Gamma_{c\Omega_x}'^+ = \frac{16}{9} \frac{c}{\lambda_c}$$

⁽¹⁾ Voir appendice.

On en déduit la formule :

$$C = \left(\frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{c} \right) \frac{\int_c^\infty d\rho \Delta_1(K_m \rho) f'(\rho, \Sigma_{tm}, c)}{\int_c^\infty d\rho \Delta_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c)} \quad (H.50)$$

Du point de vue analytique, il n'est pas évident que les formules (H.45) et (H.50) soient rigoureusement équivalentes. Mais les calculs numériques ont montré qu'elles donnent de C la même valeur au millième près (à condition toutefois que b soit suffisamment grand et Σ_{am} suffisamment faible ce qui est le cas pour les cellules des réseaux aux canaux suffisamment espacés, voir fin du chapitre I). Nous admettrons donc l'égalité :

$$C = \frac{1}{\lambda_m} + \frac{g}{8c} = \left(\frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{c} \right) \frac{\int_c^\infty \Delta_1(K_m \rho) f'(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho}{\int_c^\infty \Delta_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho}$$

H.5 Expression du paramètre hétérogène dipolaire β

Dans (H.27), on remplace Γ'^+ et Sg_{1-} par leurs valeurs respectivement tirées de (H.29) et (H.47). Compte tenu de (H.37), (H.40) et (H.50), on aboutit à :

$$\beta_{ob} = \frac{V_u P^+}{3 \pi c^2 \left(\Sigma_{am} \Delta_2(K_m c) + \frac{K_m F(b)}{3 \Lambda_{dip}} \right)} \quad (H.51)$$

On a posé :

$$F(b) = \int_c^\infty \Delta_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho \quad (H.52)$$

et

$$\Lambda_{dip} = \frac{\pi(\lambda_m + c) \lambda_m c^2}{6 P^+ a^2} \quad (H.53)$$

De (H.33), il résulte que :

$$\beta_o = \frac{V_u P^+}{3 \pi c^2 (\Sigma_{am} K_2(K_m c) + \frac{K_m \int_c^\infty K_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho}{3 \Lambda_{dip}})} \quad (H.54)$$

On rappelle que l'on a :

$$\Delta_1(K_m \rho) = I_1(K_m b) K_1(K_m \rho) - K_1(K_m b) I_1(K_m \rho) \quad (H.55)$$

$$\Delta_2(K_m \rho) = I_1(K_m b) K_2(K_m \rho) + K_1(K_m b) I_2(K_m \rho) \quad (H.56)$$

Portons les valeurs de β_{ob} et β_o ainsi obtenues dans (H.36). Cela donne :

$$I_1(K_m b) \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \frac{K_m^2}{2} \frac{K_1(K_m b)}{I_1(K_m b)} \right) = \frac{\Sigma_{am} \Delta_2(K_m c) + \frac{K_m F(b)}{3 \Lambda_{dip}}}{\Sigma_{am} K_2(K_m c) + \frac{K_m \int_c^\infty K_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho}{3 \Lambda_{dip}}}$$

soit, en remplaçant $F(b)$ par sa valeur tirée de (H.52) :

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{2}{K_m^2 K_1(K_m b)} \left[I_1(K_m b) - \frac{\Delta_2(K_m c) + \frac{K_m \int_c^\infty \Delta_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho}{3 \Sigma_{am} \Lambda_{dip}}}{K_2(K_m c) + \frac{K_m \int_c^\infty K_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho}{3 \Sigma_{am} \Lambda_{dip}}} \right]$$

Après réduction au même dénominateur des termes entre crochets et simplification compte tenu de (H.55) et (H.56), on trouve :

$$\tilde{\beta} = - \frac{2}{K_m^2} \frac{I_2(K_m c)}{K_2(K_m c)} \frac{1 - \frac{K_m \int_0^\infty I_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho}{c}}{1 + \frac{3 \Lambda_{dip} \Sigma_{am} I_2(K_m c)}{K_m \int_0^\infty K_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho}} \quad (H.57)$$

On multiplie membre à membre les relations (H.30 C) et (H.51) et les relations (H.34 C) et (H.54). On obtient :

$$\theta_{ub} = \frac{- a V_u P_{\bar{u}}^+}{3 \pi c^2 \Sigma_{au} \lambda_u \left(\Sigma_{am} \Delta_2(K_m c) + \frac{K_m F(b)}{3 \Lambda_{dip}} \right)} \quad (H.58)$$

et

$$\theta_u = \frac{- a V_u P_{\bar{u}}^+}{3 \pi c^2 \Sigma_{au} \lambda_u \left(\Sigma_{am} K_2(K_m c) + \frac{K_m \int_0^\infty K_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho}{c} \right)} \quad (H.59)$$

Revenons à (H.17) où nous remplaçons θ_{ub} , Sg_{1-} et $\Gamma_{\bar{u}}^+$ par leurs valeurs respectivement tirées de (H.58), (H.47) et (H.40). Grâce à (H.39), (H.50) et (H.53), on est conduit à :

$$P_{\bar{u}\bar{u}_b}^* = P_{\bar{u}\bar{u}}^+ + \frac{4}{3 \Sigma_{au} \lambda_u^2} \frac{(P_{\bar{u}}^+)^2}{P^+} \frac{K_m F(b)}{3 \Lambda_{dip} \left(\Sigma_{am} \Delta_2(K_m c) + \frac{K_m F(b)}{3 \Lambda_{dip}} \right)}$$

Cette égalité peut encore s'écrire :

$$P_{\bar{u}\bar{u}b}^* = P_{\bar{u}\bar{u}}^+ + \frac{4}{3 \Sigma_{au} \lambda_u^2} \cdot \frac{(P_{\bar{u}}^+)^2}{P^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{K_m F(b)}{3 \Lambda_{dip} \Sigma_{am} \Delta_2(K_m c)}} \right)$$

(H.60)

A la limite quand b tend vers l'infini, elle devient :

$$P_{\bar{u}\bar{u}}^* = P_{\bar{u}\bar{u}}^+ + \frac{4}{3 \Sigma_{au} \lambda_u^2} \cdot \frac{(P_{\bar{u}}^+)^2}{P^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{K_m \int_c^\infty d\rho K_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c)}{3 \Lambda_{dip} \Sigma_{am} K_2(K_m c)}} \right)$$

(H.61)

H.6 Approximation à l'ordre deux en K_m de l'expression de $\tilde{\beta}$

La formule (H.57) donne, après arrangement :

$$\tilde{\beta} = 2 \frac{\int_c^\infty \frac{I_1(K_m \rho)}{K_m} f(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho - \Lambda_{dip} \frac{3 \Sigma_{am}}{K_m^2} I_2(K_m c)}{\int_c^\infty K_m K_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho + \Lambda_{dip} 3 \Sigma_{am} K_2(K_m c)}$$

(H.62)

Supposons pour simplifier le choc isotrope dans le modérateur. Il est facile de voir que⁽¹⁾ :

(1) On convient de désigner par $O(x^n)$ toute fonction de x dont le quotient par x^n tend vers une valeur finie quand x tend vers zéro.

Dans ces conditions, le développement limité à l'ordre cinq de $\operatorname{argth} x$ s'écrit :

$$\operatorname{argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O(x^7)$$

suite page suivante.

$$\frac{3}{\lambda_m} \frac{\Sigma_{am}}{K_m^2} = 1 - \frac{14}{15} \frac{K_m^2}{\Sigma_{tm}^2} + O(K_m^4) \quad (H.63)$$

On pose :

$$f_o(\rho, \Sigma_{tm}, c) = \frac{f(\rho, \Sigma_{tm}, c)}{\lambda_m \Sigma_{sm}}$$

soit

$$f_o(\rho, \Sigma_{tm}, c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^2 \varphi \epsilon_1(\Sigma_{tm}(\sqrt{\rho^2 - c^2 \sin^2 \varphi} - c \cos \varphi))$$

suite du renvoi de la page précédente.

En remplaçant $\argth$ par ce développement dans la formule $\frac{\Sigma_{sm}}{K_m} \argth \frac{K_m}{\Sigma_{sm}} = 1$ (valable si le choc est isotrope dans le modérateur), on trouve, après simplification :

$$\frac{\Sigma_{sm}}{\Sigma_{tm}} = \frac{1}{1 + \frac{K_m^2}{3 \Sigma_{tm}^2} + \frac{K_m^4}{5 \Sigma_{tm}^4} + O(K_m^6)}$$

Suivant le processus classique qui consiste à remplacer $\frac{1}{1+x}$ par $1 - x + x^2 + O(x^3)$ quand x est inférieur à un, on obtient :

$$\frac{\Sigma_{sm}}{\Sigma_{tm}} = 1 - \frac{K_m^2}{3 \Sigma_{tm}^2} + \frac{14}{15} \frac{K_m^4}{\Sigma_{tm}^4} + O(K_m^6)$$

ce qu'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{\Sigma_{am}}{\Sigma_{tm}} = \frac{K_m^2}{3 \Sigma_{tm}^2} - \frac{14}{45} \frac{K_m^4}{\Sigma_{tm}^4} + O(K_m^6)$$

En multipliant de part et d'autre par $\frac{3 \Sigma_{tm}^2}{K_m^2}$, on aboutit finalement à :

$$\frac{3}{\lambda_m} \frac{\Sigma_{am}}{K_m^2} = 1 - \frac{14}{15} \frac{K_m^2}{\Sigma_{tm}^2} + O(K_m^4)$$

Dans (H.62), on remplace les fonctions de BESSEL par leurs développements respectifs à l'origine :

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} + O(x^5)$$

$$K_1(x) = (\text{constante d'Euler} + \ln \frac{x}{2}) I_1(x) + \frac{1}{x} - \frac{x}{4} - \frac{5x^3}{64} + O(x^5)$$

$$I_2(x) = \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{96} + O(x^6)$$

$$K_2(x) = \frac{2}{x^2} + O(x^2 \ln x),$$

et l'on néglige toutes les contributions à des termes d'ordre égal ou supérieur à deux dans le développement de γ .

On trouve :

$$\gamma = \frac{\int_c^\infty \rho f_o(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho}{\int_c^\infty \frac{1}{\rho} f_o(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho + \Lambda_{dip} \lambda_m \frac{2}{c^2}} + O(K_m^2 \ln K_m) \quad (H.64)$$

En annexe Y, on démontre que :

$$\int_c^\infty \rho f_o(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho = \frac{\pi}{6 \Sigma_{tm}} \left(\frac{1}{\Sigma_{tm}} + c \right)$$

$$\int_c^\infty \frac{1}{\rho} f_o(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho = \frac{\pi Y}{3 \gamma^2}$$

où γ est la quantité définie à la page 36 de la thèse de BENOIST [12] et γ le produit de c par Σ_{tm} .

Par substitution dans (H.64) et en remplaçant Σ_{tm} par $\frac{1}{\lambda_m}$, il vient :

$$\gamma = \frac{\frac{\pi}{6} \lambda_m (\lambda_m + c)}{\frac{\pi \gamma}{3 \gamma^2} + \Lambda_{dip} \lambda_m \frac{2}{c^2}} + O(K_m^2 \ln K_m)$$

ce qu'on peut encore écrire, compte tenu de l'égalité $\gamma = \frac{c}{\lambda_m}$:

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{2} c^2 \frac{\gamma + 1}{\gamma + \frac{6 \Lambda_{dip}}{\pi \lambda_m}} + O(K_m^2 \ln K_m)} \quad (H.65)$$

Cette formule est la généralisation au cas du canal chargé de la formule de la "polarisabilité" donnée par BENOIST en E 17 de [12] pour le canal vide.

H.7 Développement au second ordre en K_m du rapport $\frac{\gamma}{\beta_0}$

De (H.54) et (H.57) on tire, en remplaçant P^+ par sa valeur tirée de (H.53) :

$$\frac{\gamma}{\beta_0} = - \frac{6 \Sigma_{am} I_2(K_m c)}{K_m^2} \frac{1 - \frac{K_m \int_0^\infty I_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho}{c}}{\frac{3 \Lambda_{dip} \Sigma_{am} I_2(K_m c)}{\pi (\lambda_m + c) \lambda_m} \frac{2}{6 \Lambda_{dip}}}$$

Après quelques arrangements, cette formule devient :

$$\frac{\beta}{\beta_0} = \frac{12 \int_c^\infty I_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho}{K_m \pi (\lambda_m + c) \lambda_m} - \frac{36 \Sigma_{am} I_2(K_m c) \Lambda_{dip}}{K_m^2 \pi (\lambda_m + c) \lambda_m} \quad (H.66)$$

Dans l'intégrale, on développe I_1 à l'origine en s'arrêtant au terme d'ordre trois. Il vient :

$$\begin{aligned} \int_c^\infty I_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho &= \lambda_m \Sigma_{sm} \frac{K_m}{2} \int_c^\infty \rho f_0(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho \\ &+ \lambda_m \Sigma_{sm} \frac{K_m^3}{16} \int_c^\infty \rho^3 f_0(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho + O(K_m^5) \end{aligned}$$

En annexe Y, on montre que :

$$\int_c^\infty \rho f_0(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho = \frac{\pi}{6 \Sigma_{tm}} \left(\frac{1}{\Sigma_{tm}} + c \right)$$

et

$$\int_c^\infty \rho^3 f_0(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho = \frac{\pi}{\Sigma_{tm}} \left(\frac{4}{5 \Sigma_{tm}^3} + \frac{3c}{4 \Sigma_{tm}^2} + \frac{5}{12} \frac{c^2}{\Sigma_{tm}} + \frac{c^3}{6} \right)$$

On porte ces résultats dans (H.66) et l'on développe I_2 à l'origine. On obtient, compte tenu de (H.63) :

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\beta_0} &= 1 - \frac{\Sigma_{am}}{\Sigma_{tm}} + \frac{3}{4} \lambda_m K_m^2 \frac{\frac{4}{5} \lambda_m^3 + \frac{3}{4} c \lambda_m^2 + \frac{5}{12} c^2 \lambda_m + \frac{c^3}{6}}{(\lambda_m + c) \lambda_m} \\ &- \frac{9}{2} \frac{\Sigma_{am} c^2 \Lambda_{dip}}{\pi (\lambda_m + c) \lambda_m} + O(K_m^4) \end{aligned} \quad (H.67)$$

ou encore :

$$\frac{\lambda}{\beta_0} = 1 + K_m^2 \frac{\lambda_m}{3} \left[-\lambda_m + \frac{9}{4} \frac{\frac{4}{5} \lambda_m^3 + \frac{3}{4} c \lambda_m^2 + \frac{5}{12} c^2 \lambda_m + \frac{c^3}{6}}{(\lambda_m + c) \lambda_m} - \frac{9}{2} \frac{c^2 \Lambda_{\text{dip}}}{\pi (\lambda_m + c) \lambda_m} \right] + O(K_m^4) \quad (\text{H.68})$$

Appendice

Par définition, on a :

$$\Gamma_c'^+ = \frac{1}{\lambda_c} \int_{V_c} dV \int_{(4\pi)} d\Omega \vec{\Omega} \cdot \vec{x} \frac{\frac{K_m \Sigma_{sm}}{4\pi} \int_0^\infty dR_m e^{-\Sigma_{tm} R_m} \Delta_1(K_m \rho) \cos \alpha}{Sg_{1-}}$$

Quand on se déplace dans la cavité le long d'une corde parallèle à $\vec{\Omega}$, l'intégrand relatif à dV ne varie pas. D'où l'idée de grouper tous les éléments de volume situés le long de chacune de ces cordes. Cela donne :

$$\Gamma_c'^+ = \frac{1}{\lambda_c Sg_{1-}} \frac{K_m \Sigma_{sm}}{4\pi} \int_{S_c} dS \vec{n}_1 \cdot \int_{(2\pi)} d\Omega \vec{\Omega} \cdot \vec{x} X \int_0^\infty dR_m e^{-\Sigma_{tm} R_m} \Delta_1(K_m \rho) \cos \alpha$$

où X est la longueur de la corde dans la cavité qui part du point $\vec{\rho}_s$ de S_c dans la direction $\vec{\Omega}$ (voir notations du paragraphe H.2).

On effectue le même changement de variable que pour le calcul de Sg_{1-} .

Cela donne :

$$X = \frac{2 c \cos \varphi}{\sin \theta}$$

et

$$\Gamma_c'^+ = - \frac{2c^2}{\lambda_c Sg_{1-}} \frac{K_m \Sigma_{sm}}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^2(\varphi + \alpha_0) \cos^2 \varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_c^\infty d\rho e^{-\frac{\Sigma_{tm} (\sqrt{\rho^2 - c^2 \sin^2 \varphi} - c \cos \varphi)}{\sin \theta}} \Delta_1(K_m \rho)$$

Ce résultat peut encore s'écrire, en remplaçant Sg_1_- par sa valeur tirée de (H.47) :

$$\Gamma_c'^+ = 2 \frac{c}{\lambda_c} \frac{\int_c^\infty d\rho \Delta_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c)}{\int_c^\infty d\rho \Delta_1(K_m \rho) f'(\rho, \Sigma_{tm}, c)}$$

On a posé :

$$f(\rho, \Sigma_{tm}, c) = \lambda_m \Sigma_{sm} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^2 \varphi \varepsilon_1(\Sigma_{tm}(\sqrt{\rho^2 - c^2 \sin^2 \varphi} - c \cos \varphi))$$

On a introduit ε_1 la fonction de BESSEL intégrale de BIKLEY et NAYLER [17] d'ordre 2 :

$$\varepsilon_1(x) = K_{12}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta e^{-\frac{x}{\sin \theta}}$$

ANNEXE I

EXPRESSIONS DE P_0 ET DE P_1

On trouvera au chapitre II la signification des notations utilisées dans cette annexe.

I.1 La quantité P_0 est définie par la relation (II.C.1.6) :

$$P_0 = \frac{1 - \tilde{\gamma} S_0}{\gamma_U S_0} [P_{uu_{ob}}^* - P_{uu_0}^*] - \frac{\Sigma_{au} 2 \pi a I_1(K_m a)}{K_m V_U} \quad (I.1)$$

Cette relation peut encore s'écrire :

$$P_0 + \frac{\Sigma_{au} 2 \pi a I_1(K_m a)}{K_m V_U} = \frac{1 - \tilde{\gamma} S_0}{\gamma_U S_0} [(1 - P_{uu_0}^*) - (1 - P_{uu_{ob}}^*)] \quad (I.2)$$

En remplaçant dans cette formule $1 - P_{uu_{ob}}^*$, $1 - P_{uu_0}^*$, $\tilde{\gamma}$, γ_U et S_0 par leurs expressions respectives (D-6), (D-7), (II.B.2.20), (II.B.2.4) et (II.B.2.19) il vient, après quelques arrangements :

$$P_0 + \frac{\Sigma_{au} 2 \pi a I_1(K_m a)}{K_m V_U} = \frac{\Sigma_{au} I_1(K_m b) (3\Lambda \Sigma_{am} K_1(K_m c) + K_m K_0(K_m c)) - K_1(K_m b) (3\Lambda \Sigma_{am} I_1(K_m c) - K_m I_0(K_m c))}{K_m K_1(K_m b)} \times \frac{2 \pi c}{\Sigma_{au} V_U} \times \left[\frac{1}{\frac{K_m K_0(K_m c)}{\Sigma_{am} K_1(K_m c)} + 3\Lambda} - \frac{1}{\frac{K_m \Delta_0(K_m c)}{\Sigma_{am} \Delta_1(K_m c)} + 3\Lambda} \right] \quad (I.3)$$

Compte tenu des expressions de Δ_0 et Δ_1 , en réduisant au même dénominateur les termes entre crochets, on obtient :

$$P_0 + \frac{\sum_{au} 2\pi a I_1(K_m a)}{K_m V_u} = \frac{2\pi c}{V_u} \frac{3\Lambda \sum_{am} \Delta_1(K_m c) + K_m \Delta_0(K_m c)}{K_m K_1(K_m b)} \sum_{am}$$

$$\times \frac{K_1(K_m c) (3\Lambda \sum_{am} \Delta_1(K_m c) + K_m \Delta_0(K_m c)) - \Delta_1(K_m c) (3\Lambda \sum_{am} K_1(K_m c) + K_m K_0(K_m c))}{(3\Lambda \sum_{am} K_1(K_m c) + K_m K_0(K_m c)) (3\Lambda \sum_{am} \Delta_1(K_m c) + K_m \Delta_0(K_m c))}$$

(I.4)

ou en simplifiant :

$$P_0 + \frac{\sum_{au} 2\pi a I_1(K_m a)}{K_m V_u}$$

$$= \frac{2\pi c \sum_{am}}{V_u K_1(K_m b)} \frac{K_1(K_m c) \Delta_0(K_m c) - \Delta_1(K_m c) K_0(K_m c)}{3\Lambda \sum_{am} K_1(K_m c) + K_m K_0(K_m c)}$$

En remplaçant définitivement Δ_0 et Δ_1 par leurs expressions, on est conduit à :

$$P_0 + \frac{\sum_{au} 2\pi a I_1(K_m a)}{K_m V_u} = \frac{2\pi c \sum_{am}}{V_u} \frac{I_0(K_m c) K_1(K_m c) + K_0(K_m c) I_1(K_m c)}{3\Lambda \sum_{am} K_1(K_m c) + K_m K_0(K_m c)}$$

(I.5)

ce qui peut encore s'écrire, d'après (E.2) :

$$P_0 + \frac{\sum_{au} 2\pi a I_1(K_m a)}{K_m V_u} = \frac{2\pi c}{V_u} \frac{\sum_{am}}{K_m} \left[-\tilde{\gamma} K_1(K_m c) + I_1(K_m c) \right] \quad (I.6)$$

I.2 La quantité P_1 est définie par la relation (II.C.1.19) :

$$P_1 + 2 \sum_{au} \pi \frac{I_2(K_m a) a}{K_m^2 V_u} = - \frac{1 - \frac{\gamma}{\beta} \frac{K_m^2 S_0}{2}}{\frac{K_m^2}{0_u \frac{2}{2} S_0}} \frac{a}{4} (P_{uu_b}^* - P_{uu}^*) \quad (I.7)$$

En remplaçant β , θ_u , $P_{uu_b}^*$, P_{uu}^* et S_0 par leurs expressions respectives (II.B.3.28), (II.B.3.35), (II.C.1.20), (II.C.1.21) et (II.B.2.19) on obtient, après quelques arrangements :

$$P_1 + 2 \sum_{au} \pi \frac{I_2(K_m a)}{K_m^2 V_u} a = \frac{3 \Lambda_{dip} \sum_{am} \Delta_2(K_m c) + K_m F(b)}{V_u a P_u^+ \Lambda_{dip} K_1(K_m b) \frac{K_m^2}{2}} \frac{a}{4}$$

$$\times \frac{4}{3 \sum_{au} \lambda_u^2} \frac{(P_u^+)^2}{P^+} \left[\frac{1}{1 + \frac{c}{3 \Lambda_{dip} \sum_{am} K_2(K_m c)}} - \frac{1}{1 + \frac{K_m F(b)}{3 \Lambda_{dip} \sum_{am} \Delta_2(K_m c)}} \right]$$

(I.8)

En réduisant au même dénominateur les termes entre crochets et en simplifiant au maximum, il vient en vertu de (II.B.3.37) :

$$P_1 + 2 \sum_{au} \pi \frac{I_2(K_m a)}{K_m^2 V_u} a =$$

$$= - \frac{P_u^+}{P^+} \frac{\pi c^2}{\lambda_u V_u} \sum_{am} \frac{2}{K_m^2} \frac{K_2(K_m c) K_m \int_c^\infty d\rho I_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho + I_2(K_m c) K_m \int_c^\infty d\rho K_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c)}{3 \Lambda_{dip} \sum_{am} K_2(K_m c) + K_m \int_c^\infty d\rho K_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c)}$$

(I.9)

En tenant compte, une fois encore, de l'expression (II.B.3.28) de γ_β , on est finalement conduit à :

$$P_1 + 2 \sum_{au} \pi \frac{I_2(K_m a)}{K_m^2 V_u} a = - \frac{P_u^+}{P^+} \frac{\pi c^2}{\lambda_u V_u} \sum_{am} \left(\gamma_\beta K_2(K_m c) + \frac{2}{K_m^2} I_2(K_m c) \right)$$

(I.10).

ANNEXE J

FLUX CREE PAR L'INTRODUCTION, DANS LE MODERATEUR D'UNE CELLULE OUVERTE⁽¹⁾,

D'UNE SOURCE ISOTROPE D'INTENSITE : $S(\vec{\rho}) = \frac{1}{4\pi} (A K_0(\kappa\rho) + \vec{B} \cdot \frac{\vec{\rho}}{\rho} K_1(\kappa\rho))$

où κ est une constante positive et A et $\vec{B}$ respectivement un scalaire et un vecteur indépendants de l'espace.

Les notations et conventions adoptées sont celles du chapitre II. On se limite au schéma monocinétique. La quantité κ est supposée différente de la solution K_m de l'équation caractéristique du modérateur (cf. [14]) :

$$\frac{\Sigma_{sm}}{K_m} \operatorname{argth} \frac{K_m}{\Sigma_{tm}} = 1 \quad (J.1)$$

Il est facile de montrer, en utilisant la transformation de FOURIER, que $S(\vec{\rho})$ est une superposition d'exponentielles de la forme :

$$S(\vec{\rho}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{u} \cdot \vec{\rho} > 0} du s(\vec{u}) e^{-\kappa \vec{u} \cdot \vec{\rho}} \quad (J.2)$$

En effet, $S(\vec{\rho})$ obéit à l'équation de LAPLACE :

$$\Delta S - \kappa^2 S = 0$$

L'équation du transport dans le modérateur ($\operatorname{div} \vec{\Omega} v + \Sigma_{tm} v = \frac{\Sigma_{sm}\phi}{4\pi} + \text{sources}$) admet, pour une source d'intensité $\frac{e}{4\pi} e^{-\kappa \vec{u} \cdot \vec{\rho}}$, une solution particulière d'expression :

⁽¹⁾ Terme proposé par ALPIAR [8C] pour désigner une cellule constituée d'un canal chargé entouré de modérateur jusqu'à l'infini.

$$\zeta_{e1}(\vec{\rho}, \vec{\Omega}, \vec{u}) = k h(\vec{u}, \vec{\Omega}) e^{-\kappa \vec{u} \cdot \vec{\rho}}$$

avec

$$\int_{(4\pi)} h(\vec{u}, \vec{\Omega}) d\Omega = 1 \quad (J.3)$$

Il suffit de prendre :

$$k = \frac{1}{\frac{\kappa}{\argth \frac{\kappa}{\Sigma_{tm}}} - \Sigma_{sm}} \quad (J.4)$$

et

$$h(\vec{u}, \vec{\Omega}) = \frac{\Sigma_{sm} + \frac{1}{k}}{4 \pi (\Sigma_{tm} - \kappa \vec{\Omega} \cdot \vec{u})} \quad (J.5)$$

Compte tenu de la linéarité de l'équation de BOLTZMANN, il existe donc un flux angulaire qui est solution particulière de l'équation du transport du modérateur avec la source S.

C'est :

$$\zeta_1(\vec{\rho}, \vec{\Omega}) = k \int_{\vec{u} \cdot \vec{\rho} > 0} du h(\vec{u}, \vec{\Omega}) s(\vec{u}) e^{-\kappa \vec{u} \cdot \vec{\rho}} \quad (J.6)$$

Si l'on se reporte à la définition de S, le flux scalaire intégrale sur l'angle solide (4π) de ξ_1 , a pour intensité (cf. (J.3)) :

$$\psi_1(\vec{\rho}) = k \left(A K_0(\kappa \rho) + \vec{B} \cdot \frac{\vec{\rho}}{\rho} K_1(\kappa \rho) \right) \quad (J.7)$$

Soit ζ le flux angulaire créé dans la cellule ouverte par la source S. On pose :

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 \quad (\text{J.8})$$

Etant donnée la linéarité de l'équation de BOLTZMANN, il est facile de voir que, dans la cellule ouverte, ζ_2 est un flux angulaire qui obéit, à l'extérieur du canal, à l'équation du transport sans source et à l'intérieur du canal à l'équation du transport avec source. Le flux scalaire ψ_2 associé à ζ_2 admet donc dans le modérateur une partie asymptotique ψ_{2as} qui est solution de l'équation de LAPLACE (cf. [14]) :

$$\Delta\phi - K_m^2 \phi = 0$$

La source S comprenant autour du canal une partie de révolution et une partie antisymétrique, il est clair que, comme ψ_1 , ψ_{2as} se composera d'une partie de révolution et d'une partie antisymétrique. On écrit :

$$\psi_{2as}(\vec{\rho}) = C K_0(K_m \rho) + \vec{D} \cdot \frac{\vec{\rho}}{\rho} K_1(K_m \rho) \quad (\text{J.9})$$

1 - Calcul de C

L'intégration sur tout l'espace de la relation de conservation (classique) qui lie le flux scalaire ψ au courant scalaire $\vec{g}$ associés à ζ donne, si l'on assimile ψ_2 à sa partie asymptotique dans le modérateur :

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{am} C \int_C^\infty K_0(K_m \rho) \rho \, d\rho + 2\pi \sum_{am} k A \int_C^\infty K_0(k\rho) \rho \, d\rho + \sum_{au} \int_{V_u} \psi \, dV \\ = 2\pi A \int_C^\infty K_0(k\rho) \rho \, d\rho \end{aligned} \quad (\text{J.10})$$

La quantité $\Sigma_{au} \int_{V_u} \psi dV$ représente la capture dans le barreau des neutrons issus de la source isotrope, d'intensité $\frac{A}{4\pi} K_0(\kappa\rho)$, répartie dans le modérateur. En appliquant le théorème de réciprocity (cf. [14]), on voit que c'est aussi l'intégrale pondérée par $A K_0(\kappa\rho)$, dans le volume du modérateur, du flux créé par une source isotrope et uniforme d'intensité $\frac{\Sigma_{au}}{4\pi}$ localisée au barreau. Si l'on assimile ce flux dans le modérateur à sa partie asymptotique, d'expression (voir chapitre II § B.1) :

$$\gamma_u \Sigma_{au} K_0(K_m \rho)$$

il vient :

$$\Sigma_{au} \int_{V_u} \psi dV = 2\pi \gamma_u \Sigma_{au} A \int_c^\infty K_0(K_m \rho) K_0(\kappa\rho) \rho d\rho \quad (J.11)$$

En utilisant les propriétés des fonctions de BESSEL (cf. [16]) il est facile de montrer que :

$$\int_c^\infty K_0(K_m \rho) K_0(\kappa\rho) \rho d\rho = \frac{K_m K_1(K_m c) K_0(\kappa c) - \kappa K_1(\kappa c) K_0(K_m c)}{K_m^2 - \kappa^2} c \quad (J.12)$$

Par suite, (J.10) conduit à la relation :

$$C = \frac{(1 - \Sigma_{am} k) \frac{K_1(\kappa c)}{\kappa} - \gamma_u \Sigma_{au} h}{\Sigma_{am} \frac{K_1(K_m c)}{K_m}} A \quad (J.13)$$

On a posé :

$$h = \frac{K_m K_1(K_m c) K_0(\kappa c) - \kappa K_1(\kappa c) K_0(K_m c)}{K_m^2 - \kappa^2} \quad (J.14)$$

2 - Calcul de $\vec{D}$

On multiplie par x la relation de conservation (classique) précédemment envisagée pour le calcul de C . Puis on l'intègre sur tout l'espace. Si l'on assimile ψ_2 à sa partie asymptotique dans le modérateur, il vient, compte tenu de l'égalité :

$$x \operatorname{div} \vec{g} = \operatorname{div} x\vec{g} - g_x$$

dans laquelle g_x représente la composante x de $\vec{g}$:

$$\begin{aligned} & - (\lambda_m P_{\hat{m}m}^* + \lambda_c P_{\hat{m}c}^* + \lambda_u P_{\hat{m}u}^*) B_x + \pi \sum_{am} D_x \int_c^\infty K_1(K_m \rho) \rho^2 d\rho \\ & + \pi \sum_{am} k B_x \int_c^\infty K_1(\kappa \rho) \rho^2 d\rho + \sum_{au} \int_{V_u} x \psi dV = \pi B_x \int_c^\infty K_1(\kappa \rho) \rho^2 d\rho \end{aligned} \quad (J.15)$$

On désigne par B_x et D_x les composantes x de $\vec{B}$ et $\vec{D}$. Les symboles $P_{\hat{m}m}^*$, $P_{\hat{m}c}^*$ et $P_{\hat{m}u}^*$ ont été introduits pour représenter les captures fictives (cf. chapitre II § B.3 a) respectivement dans le modérateur, la cavité et le barreau, des neutrons nés dans le modérateur avec l'intensité

$$\frac{1}{4\pi} K_1(\kappa \rho) \cos \alpha.$$

Le raisonnement suivi en première partie de l'annexe G pour démontrer les relations de conservation (fictives) du premier type, nous permet de voir que :

$$P_{\hat{m}m}^* + P_{\hat{m}u}^* = 0 \quad (J.16)$$

Par ailleurs, l'application du théorème de réciprocité nous montre que $P_{\hat{m}i}^*$ est égale à l'intégrale pondérée par $-K_1(\kappa\rho) \cos \alpha$ dans le modérateur, du flux créé par une source anisotrope uniformément répartie dans le milieu i et d'intensité $\frac{\Omega}{\lambda_i} \frac{x}{4\pi}$. Si l'on assimile ce flux à sa partie asymptotique dans le modérateur, il vient, compte tenu des définitions du paragraphe H.1 de l'annexe H :

$$P_{\hat{m}u}^* = - \frac{\pi}{\lambda_u} \beta_u K_m \int_c^\infty K_1(\kappa\rho) K_1(K_m \rho) \rho \, d\rho \quad (J.17)$$

$$P_{\hat{m}c}^* = - \frac{\pi}{\lambda_c} \beta_c K_m \int_c^\infty K_1(\kappa\rho) K_1(K_m \rho) \rho \, d\rho \quad (J.18)$$

En utilisant les propriétés des fonctions de BESSEL (cf. [16B]), il est facile de voir que :

$$\int_c^\infty K_1(\kappa\rho) \rho^2 \, d\rho = \frac{1}{\kappa} K_2(\kappa c) c^2$$

$$\int_c^\infty K_1(\kappa\rho) K_1(K_m \rho) \rho \, d\rho = \frac{K_m K_1(\kappa c) K_0(K_m c) - \kappa K_1(K_m c) K_0(\kappa c)}{K_m^2 - \kappa^2} c \quad (J.19)$$

La capture en x du flux ψ dans le barreau $\Sigma_{au} \int_{V_u} x \psi \, dV$ peut également se calculer par réciprocité. Elle est égale à l'intégrale pondérée par $B_x K_1(\kappa\rho) \cos \alpha$ dans le volume du modérateur, du flux créé par une source isotrope d'intensité $\Sigma_{au} \frac{x}{4\pi}$, localisée au barreau. Si l'on assimile ce flux dans le modérateur à sa partie asymptotique, d'expression (voir chapitre II § B.1) : $\theta_u \Sigma_{au} K_m K_1(K_m \rho) \cos \alpha$, il vient :

$$\Sigma_{au} \int_{V_u} x \psi \, dV = \pi \theta_u \Sigma_{au} K_m B_x \int_c^\infty K_1(K_m \rho) K_1(\kappa\rho) \rho \, d\rho \quad (J.20)$$

Compte tenu de (J.19), l'égalité (J.15) conduit à la relation :

$$D_x = \frac{(1 - \sum_{am} k) \frac{K_2(\kappa c) c}{\kappa} - \beta_o K_m l}{\sum_{am} \frac{K_2(K_m c)}{K_m} c} B_x \quad (J.21)$$

On a posé :

$$l = \frac{K_m K_1(\kappa c) K_o(K_m c) - \kappa K_1(K_m c) K_o(\kappa c)}{K_m^2 - \kappa^2} \quad (J.22)$$

$$\text{et} \quad \beta_o = \beta_u \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u}\right) + \beta_c + \sum_{au} \theta_u \quad (J.23)$$

On montre, en annexe H, que :

$$\beta_o = - \frac{\sum_{au} \lambda_u}{a} \frac{P^+}{P_u^-} \theta_u \quad (J.24)$$

Il est évident que la relation (J.21) lie également les composantes y de $\vec{D}$ et de $\vec{B}$.

En conclusion, on peut dire que l'introduction, dans le modérateur d'une cellule ouverte, d'une source isotrope d'intensité $\frac{1}{4\pi} (A K_o(\kappa\rho) + \vec{B} \cdot \frac{\vec{\rho}}{\rho} K_1(\kappa\rho))$ crée un flux qui admet pour expression asymptotique dans le modérateur de la cellule :

$$\psi_{as}(\vec{\rho}) = k (A K_o(\kappa\rho) + \vec{B} \cdot \frac{\vec{\rho}}{\rho} K_1(\kappa\rho)) + \mu A K_o(K_m \rho) + \pi \vec{B} \cdot \frac{\vec{\rho}}{\rho} K_1(K_m \rho)$$

avec

$$k = \frac{1}{\frac{\kappa}{\operatorname{argth} \frac{\kappa}{\Sigma_{tm}}} - \Sigma_{sm}} \quad (\text{J.4})$$

$$\mu = - \frac{k(\Sigma_{am} - \frac{1}{k}) \frac{K_1(\kappa c)}{\kappa} + \gamma_u \Sigma_{au} h}{\Sigma_{am} \frac{K_1(K_m c)}{K_m}} \quad (\text{J.25})$$

$$\pi = - \frac{k(\Sigma_{am} - \frac{1}{k}) \frac{K_2(\kappa c)}{\kappa} c + \beta_o K_m \ell}{\Sigma_{am} \frac{K_2(K_m c)}{K_m} c} \quad (\text{J.26})$$

et

$$h = \frac{K_m K_1(K_m c) K_o(\kappa c) - \kappa K_1(\kappa c) K_o(K_m c)}{K_m^2 - \kappa^2} \quad (\text{J.14})$$

$$\ell = \frac{K_m K_1(\kappa c) K_o(K_m c) - \kappa K_1(K_m c) K_o(\kappa c)}{K_m^2 - \kappa^2} \quad (\text{J.22})$$

Cette conclusion n'a de sens que si $\kappa \neq K_m$ (sinon la quantité k est indéterminée).

ANNEXE K

EXPRESSION DES PARAMETRES HETEROGENES EN THEORIE MULTIGROUPE

On trouvera au chapitre III et en annexe H la signification des notations utilisées dans cette annexe. On désigne, en outre, par ρ le module du rayon vecteur $\vec{r} - \vec{r}_k$ partant du centre du canal dans une section droite de la géométrie k .

K.1 Calcul du paramètre hétérogène polaire $\gamma_k^{g',g}$

La probabilité $P_{uu_{ok}}^{*g}$ se compose d'une part de la contribution $P_{uu_{ok}}^{+g}$ des neutrons capturés dans le barreau sans avoir jamais pénétré dans le modérateur et d'autre part de celle des neutrons capturés dans le barreau après avoir voyagé une ou plusieurs fois dans le modérateur. Si l'on assimile le flux à sa partie asymptotique dans le modérateur, cela signifie que :

$$P_{uu_{ok}}^{*g} = P_{uu_{ok}}^{+g} + \frac{\gamma_{uk}^g}{V_u} S_{g1-}^0 \Gamma_{u_{ok}}'^{+g} \quad (K.1)$$

avec

$$S_{g1-}^0 = \frac{\Sigma_{sm}^g}{4\pi} \int_{S_c} dS \vec{n}_1 \cdot \int_{(2\pi)_-} d\Omega \vec{\Omega} \int_0^\infty dR_m e^{-\Sigma_{tm}^g R_m} K_0(K_m^g \rho)$$

Le symbole $\Gamma_{u_{ok}}'^{+g}$ représente la noirceur du canal k , au niveau du groupe g (voir annexe D).

On peut de même écrire :

$$P_{ok}^{g',g} V_u = P_{ok}^{+g',g} V_u + \gamma_k^{g',g} S_{g1-}^0 \Gamma_{uok}'^{+g} \quad (K.2)$$

où $P_{ok}^{+g',g}$ représente dans $P_{ok}^{g',g}$ la contribution des neutrons n'ayant jamais pénétré dans le modérateur.

L'élimination de $\frac{S_{g1-}^0 \Gamma_{uok}'^{+g}}{V_u}$ entre (K.1) et (K.2) donne :

$$\frac{P_{ok}^{g',g} - P_{ok}^{+g',g}}{\gamma_k^{g',g}} = \frac{P_{uuok}^{*g} - P_{uuok}^{+g}}{\gamma_{uk}^g} \quad (K.3)$$

Pour $g' = g$, cette relation devient :

$$\frac{P_{ok}^{g,g} - P_{ok}^{+g,g}}{\gamma_k^{g,g}} = \frac{P_{uuok}^{*g} - P_{uuok}^{+g}}{\gamma_{uk}^g} \quad (K.4)$$

Les résultats obtenus au chapitre II nous permettent d'écrire :

$$\gamma_{uk}^g = \frac{K_m^g}{\Sigma_{auk}^g \left(3 \Lambda_k^g \Sigma_{am}^g K_1(K_m^g c) + K_m^g K_o(K_m^g c) \right)} \quad (K.5)$$

$$1 - P_{uuok}^{*g} = \frac{2\pi c}{\Sigma_{auk}^g V_u \left(3 \Lambda_k^g + \frac{K_m^g K_o(K_m^g c)}{\Sigma_{am}^g K_1(K_m^g c)} \right)} \quad (K.6)$$

$$\gamma_k^{g,g} = \frac{I_1(K_m^g c)}{K_1(K_m^g c)} \frac{1 - \frac{K_m^g I_o(K_m^g c)}{3 \Lambda_k^g \Sigma_{am}^g I_1(K_m^g c)}}{1 + \frac{K_m^g K_o(K_m^g c)}{3 \Lambda_k^g \Sigma_{am}^g K_1(K_m^g c)}} \quad (K.7)$$

$$P_{ok}^{g,g} = \frac{2\pi c}{V_u} \left(- \gamma_k^{g,g} \frac{K_1(K_m^g c)}{K_m^g} \Sigma_{am}^g + \Sigma_{am}^g \frac{I_1(K_m^g c)}{K_m^g} \right) - \frac{2\pi a}{V_u} \frac{I_1(K_m^g a)}{K_m^g} \Sigma_{auk}^g \quad (K.8)$$

Dans [10] (expression 3bis), on trouve la valeur de $1 - P_{uuok}^{+g}$
Elle est égale à :

$$1 - P_{uuok}^{+g} = \frac{c \Gamma_{uuok}^{'+g}}{2 a^2 \Sigma_{auk}^g} \quad (K.9)$$

Substituant dans (K.4), on trouve :

$$P_{ok}^{+g,g} = \frac{\pi c}{V_u} \left(- \frac{I_1(K_m^g c) \Sigma_{am}^g (3 \Lambda_k^g - K_m^g I_o(K_m^g c))}{2 K_m^g} \Gamma_{uuok}^{'+g} + \frac{2 \Sigma_{am}^g I_1(K_m^g c)}{K_m^g} \right) - \frac{2\pi a}{V_u} \frac{I_1(K_m^g a)}{K_m^g} \Sigma_{auk}^g$$

Compte tenu de l'égalité $\Lambda_k^g = \Lambda_N^g + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{\Gamma_{uuok}^{'+g}} - 1 \right)$, il vient :

$$P_{ok}^{+g,g} = \frac{\pi c}{2 V_u} \left(I_o(K_m^g c) - \frac{I_1(K_m^g c) \Sigma_{am}^g (3 \Lambda_N^g - 4)}{K_m^g} \right) \Gamma_{uuok}^{'+g} - \frac{2\pi a}{V_u} \frac{I_1(K_m^g a)}{K_m^g} \Sigma_{auk}^g \quad (K.10)$$

La quantité $P_{ok}^{+g,g} V_u$ représente la capture dans le barreau de neutrons qui ne sont jamais sortis du canal. Si dans son expression les caractéristiques neutroniques du modérateur apparaissent, c'est uniquement parce qu'elles interviennent en tant que constantes dans la composition de la source $\gamma_{ok}^{g,g}$. Celle-ci a, en effet, pour intensité (voir la définition de $\gamma_{ok}^{g,g}$ et les formules (III.A.10), (III.B.6) et (III.B.19))

(1) Se limiter à la considération de ces neutrons revient à assimiler le modérateur à un corps noir.

dans la cavité :

$$\Sigma_{tm}^g \frac{\Sigma_{sm}^g}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-K_m^g \rho \cos \alpha_0}}{(\Sigma_{tm}^g - K_m^g \cos(\alpha_0 + \varphi) \sin \theta)} d\alpha_0 - \frac{\Sigma_{sm}^g}{4\pi} I_0(K_m^g \rho) \quad (K.11)$$

dans le barreau :

$$(\Sigma_{tm}^g - \Sigma_{tuk}^g) \frac{\Sigma_{sm}^g}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-K_m^g \rho \cos \alpha_0}}{\Sigma_{tm}^g - K_m^g \cos(\alpha_0 + \varphi) \sin \theta} d\alpha_0 - \frac{\Sigma_{sm}^g - \Sigma_{suk}^g}{4\pi} I_0(K_m^g \rho) \quad (K.12)$$

Or il suffit (voir (III.A.14)) de ne changer dans (K.11) et (K.12)

que K_m^g par $K_m^{g'}$ et Σ_{sm}^g par $\Sigma_{sm}^g + \frac{1 - \delta_{g',g}}{K_m^{g'}}$ pour obtenir l'intensité de la

source $\gamma_{ok}^{g',g}$ respectivement dans la cavité et le barreau contenus dans le canal k. Comme la même fonction de GREEN - indépendante des propriétés du modérateur - permet d'exprimer formellement $P_{ok}^{+g',g} V_u$ à partir de $\gamma_{ok}^{g',g}$ et $P_{ok}^{+g,g} V_u$ à partir de $\gamma_{ok}^{g,g}$, il résulte de (K.10) que $P_{ok}^{+g',g}$ admet pour expression :

$$P_{ok}^{+g',g} = \frac{\pi c}{2 V_u} \left(I_0(K_m^{g'} c) - \frac{I_1(K_m^{g'} c) (\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta_{g',g}}{K_m^{g'}}) (3 \lambda_N^g - 4)}{K_m^{g'}} \right) \Gamma_{uok}^{'+g} - \frac{2\pi a}{V_u} \frac{I_1(K_m^{g'} a)}{K_m^{g'}} \Sigma_{auk}^g \quad (K.13)$$

En s'inspirant du calcul de γ_u effectué au chapitre II § B.2 a, il est facile de montrer que compte tenu de (III.B.9), on a :

$$\gamma_k^{g',g} = \frac{\frac{2\pi}{K_m^{g'}} \left[\left(\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{K_g^{g'}} \right) I_1(K_m^{g'} c) c - \Sigma_{auk}^g I_1(K_m^{g'} a) a \right] - P_{ok}^{g',g} V_u}{2 \pi c \frac{\Sigma_{am}^g}{K_m^g} K_1(K_m^g c)} \quad (K.14)$$

L'élimination de $P_{ok}^{g',g}$ entre (K.3), où l'on remplace $P_{ok}^{g',g}$ par sa valeur tirée de (K.13), et (K.14) conduit à l'égalité :

$$\gamma_k^{g',g} = \frac{K_m^g}{K_m^{g'}} \frac{\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{K_g^{g'}}}{\Sigma_{am}^g} \frac{I_1(K_m^{g'} c)}{K_1(K_m^g c)} \frac{1 - \frac{K_m^{g'} I_0(K_m^{g'} c)}{3 \Lambda_K^g \left(\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{K_g^{g'}} \right) I_1(K_m^{g'} c)}}{1 + \frac{K_m^g K_o(K_m^g c)}{3 \Lambda_K^g \Sigma_{am}^g K_1(K_m^g c)}} \quad (K.15)$$

La relation (K.14) peut encore s'écrire :

$$P_{ok}^{g',g} = \frac{2\pi c}{V_u} \left(-\gamma_k^{g',g} \frac{\Sigma_{am}^g K_1(K_m^g c)}{K_m^g} + \left(\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{K_g^{g'}} \right) \frac{I_1(K_m^{g'} c)}{K_m^{g'}} \right) - \frac{2\pi a}{V_u} \frac{I_1(K_m^{g'} a)}{K_m^{g'}} \Sigma_{auk}^g \quad (K.16)$$

K.2 Calcul du paramètre hétérogène dipolaire $\beta_k^{g',g}$

Ce calcul s'inspire du calcul précédent. Soient $-P_{2k}^{g',g} V_u$ et $-P_{3k}^{g',g} V_u$ les captures fictives, respectivement dans le barreau et la cavité, dues à la source $\gamma_{1k}^{g',g}$ pour laquelle α est l'angle qui amène $\vec{r} - \vec{r}_k$ sur Ox.

On intègre sur toute la géométrie k, en pondérant par $x-x_k$ (projection de $\vec{r} - \vec{r}_k$ sur Ox), la relation de conservation :

$$\operatorname{div} \vec{j} + \Sigma_a^g \phi = \int_{(4\pi)} \mathcal{Y}_{1k}^{g',g} d\Omega$$

Il vient⁽¹⁾ :

$$\begin{aligned} & \pi \Sigma_{am}^g \beta_k^{g',g} K_2(K_m^g c) c^2 + 2\pi \lambda_m^g \frac{\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{K_m^{g'}}}{(K_m^{g'})^3} \left(\Sigma_{tm}^g I_1(K_m^{g'} c) c \right. \\ & \quad \left. - \Sigma_{tuk}^g I_1(K_m^{g'} a) a \right) + (\lambda_{uk}^g - \lambda_m^g) V_u P_{2k}^{g',g} + \lambda_c V_u P_{3k}^{g',g} - a V_u P_{1k}^{g',g} \\ & = - \frac{2\pi}{(K_m^{g'})^2} \left(\left(\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{K_m^{g'}} \right) I_2(K_m^{g'} c) c^2 - \Sigma_{auk}^g I_2(K_m^{g'} a) a^2 \right) \end{aligned}$$

(K.17)

En effet, on a :

$$\int_{(4\pi)} d\Omega \Omega_x a_{1,1}^{g',g} = \cos \alpha \frac{\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{K_m^{g'}}}{K_m^{g'}} (I_0(K_m^{g'} \rho) + I_2(K_m^{g'} \rho))$$

$$\int_{(4\pi)} d\Omega \Omega_x a_{1,2}^{g',g} = \sin \alpha \frac{\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{K_m^{g'}}}{K_m^{g'}} (I_0(K_m^{g'} \rho) - I_2(K_m^{g'} \rho))$$

Il en résulte que :

$$\int_{V_u + V_c} dV \int_{(4\pi)} d\Omega \Omega_x \mathcal{Y}_{1k}^{g',g} = 2\pi \frac{\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{K_m^{g'}}}{(K_m^{g'})^3} \left(\Sigma_{tm}^g I_1(K_m^{g'} c) c - \Sigma_{tuk}^g I_1(K_m^{g'} a) a \right)$$

Par ailleurs, compte tenu de la propriété (III.B.10), il est facile de voir que :

⁽¹⁾ On assimile le flux à sa partie asymptotique dans le modérateur.

$$\int_{V_u + V_c} \mathbf{x} \, dV \int_{(4\pi)} \mathcal{Y}_{1k}^{g',g} \, d\Omega = - \frac{2\pi}{(K_m^{g'})^2} \left(\left(\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{k_g^{g'}} \right) I_2(K_m^{g'} c) c^2 - \Sigma_{auk}^g I_2(K_m^{g'} a) a^2 \right)$$

De (K.17), on tire :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{1k}^{g',g} = - \frac{\lambda_{uk}^g V_u \mathcal{P}_{1k}^{g',g} + \frac{2\pi}{(K_m^{g'})^2} \left[\lambda_m^g \frac{\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{k_g^{g'}}}{K_m^{g'}} \left(\Sigma_{tm}^g I_1(K_m^{g'} c) c - \Sigma_{tuk}^g I_1(K_m^{g'} a) a \right) + \left(\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{k_g^{g'}} \right) I_2(K_m^{g'} c) c^2 - \Sigma_{auk}^g I_2(K_m^{g'} a) a^2 \right]}{\Sigma_{am}^g \pi c^2 K_2(K_m^g c)} \end{aligned}$$

(K.18)

On a posé :

$$\mathcal{P}_{1k}^{g',g} = \left(1 - \frac{\lambda_m^g}{\lambda_{uk}^g} \right) \mathcal{P}_{2k}^{g',g} + \frac{\lambda_c}{\lambda_{uk}^g} \mathcal{P}_{3k}^{g',g} - \frac{a}{\lambda_{uk}^g} \mathcal{P}_{1k}^{g',g} \quad (K.19)$$

La relation (K.18) est équivalente à la suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{1k}^{g',g} = - \frac{\lambda_{uk}^g \Sigma_{am}^g \pi c^2 K_2(K_m^g c) + \frac{2\pi}{(K_m^{g'})^2} \left[\lambda_m^g \frac{\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{k_g^{g'}}}{K_m^{g'}} \left(\Sigma_{tm}^g I_1(K_m^{g'} c) c - \Sigma_{tuk}^g I_1(K_m^{g'} a) a \right) + \left(\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{k_g^{g'}} \right) I_2(K_m^{g'} c) c^2 - \Sigma_{auk}^g I_2(K_m^{g'} a) a^2 \right]}{\lambda_{uk}^g V_u} \end{aligned}$$

(K.20)

La capture - $P_{1k}^{g',g} V_u$ - i pouvant prendre la valeur 1, 2 ou 3 - se compose d'une part de la contribution des neutrons qui ne sont jamais sortis du canal, soit - $P_{1k}^{+g',g} V_u$, d'autre part de celle des neutrons qui ont voyagé une ou plusieurs fois dans le modérateur avant d'être capturés. Si l'on assimile le flux à sa partie asymptotique dans le modérateur, on peut écrire :

$$V_u P_{1k}^{g',g} = V_u P_{1k}^{+g',g} - \beta_k^{g',g} S_{g1-}^g \Gamma_{uk}^{' +g} \quad (K.21)$$

$$V_u P_{2k}^{g',g} = V_u P_{2k}^{+g',g} - \beta_k^{g',g} S_{g1-}^g \Gamma_{uk}^{' +g} \quad (K.22)$$

$$V_u P_{3k}^{g',g} = V_u P_{3k}^{+g',g} - \beta_k^{g',g} S_{g1-}^g \Gamma_{ck}^{' +g} \quad (K.23)$$

avec :

$$S_{g1-}^g = \frac{K_m^g \Sigma_{sm}^g}{4 \pi} \int_{S_c} dS \vec{n}_1 \cdot \int_{(2\pi)_-} d\Omega \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}_x \int_0^\infty dR_m e^{-\Sigma_{tm}^g R_m} K_1(K_m^g \rho) \cos \alpha$$

On a également (voir formule (H.17) de l'annexe H) la relation :

$$P_{\bar{u}u_k}^{*g} = P_{\bar{u}u_k}^{+g} + \frac{4}{V_u a} \theta_{uk}^g S_{g1-}^g \Gamma_{\bar{u}k}^{' +g} \quad (K.24)$$

où $P_{\bar{u}u_k}^{+g}$ représentée dans $P_{\bar{u}u_k}^{*g}$ la contribution des neutrons n'ayant jamais pénétré dans le modérateur.

Les symboles $\Gamma_{jk}^{' +g}$ et $\Gamma_{\bar{j}k}^{' +g}$ représentent respectivement, au niveau du groupe g , l'opacité fictive et l'opacité "en x " du milieu j inclus dans le canal k (voir annexe H).

De (K.21), (K.22), (K.23) et (K.24) on tire :

$$\frac{p_{1k}^{g',g} - p_{1k}^{+g',g}}{\gamma_{\beta_k}^{g',g} \Gamma_{uk}^{'+g}} = \frac{p_{2k}^{g',g} - p_{2k}^{+g',g}}{\gamma_{\beta_k}^{g',g} \Gamma_{uk}^{'+g}} = \frac{p_{3k}^{g',g} - p_{3k}^{+g',g}}{\gamma_{\beta_k}^{g',g} \Gamma_{ck}^{'+g}} = -\frac{a}{4} \frac{p_{\bar{u}\bar{u}_k}^{*g} - p_{\bar{u}\bar{u}_k}^{+g}}{\theta_{uk}^g \Gamma_{\bar{u}k}^{'+g}} \quad (K.25)$$

En combinant linéairement les trois premiers membres de cette égalité selon la formule (K.19), on obtient :

$$\frac{\tilde{p}_{1k}^{g',g} - \tilde{p}_{1k}^{+g',g}}{\gamma_{\beta_k}^{g',g} \Gamma_k^{'+g}} = \frac{p_{1k}^{g',g} - p_{1k}^{+g',g}}{\gamma_{\beta_k}^{g',g} \Gamma_{\bar{u}k}^{'+g}} = -\frac{a}{4} \frac{p_{\bar{u}\bar{u}_k}^{*g} - p_{\bar{u}\bar{u}_k}^{+g}}{\theta_{uk}^g \Gamma_{\bar{u}k}^{'+g}} \quad (K.26)$$

avec

$$\tilde{p}_{1k}^{+g',g} = \left(1 - \frac{\lambda_m^g}{\lambda_{uk}^g}\right) p_{2k}^{+g',g} + \frac{\lambda_c}{\lambda_{uk}^g} p_{3k}^{+g',g} - \frac{a}{\lambda_{uk}^g} p_{1k}^{+g',g}$$

et

$$\Gamma_k^{'+g} = \left(1 - \frac{\lambda_m^g}{\lambda_{uk}^g}\right) \Gamma_{uk}^{'+g} + \frac{\lambda_c}{\lambda_{uk}^g} \Gamma_{ck}^{'+g} - \frac{a}{\lambda_{uk}^g} \Gamma_{\bar{u}k}^{'+g}$$

Pour $g' = g$, (K.26) donne compte tenu de (H.29) :

$$\frac{\tilde{p}_{1k}^{g,g} - \tilde{p}_{1k}^{+g,g}}{\gamma_{\beta_k}^{g,g} p_k^{+g}} p_{\bar{u}k}^{+g} = \frac{p_{1k}^{g,g} - p_{1k}^{+g,g}}{\gamma_{\beta_k}^{g,g}} = -\frac{a}{4} \frac{p_{\bar{u}\bar{u}_k}^{*g} - p_{\bar{u}\bar{u}_k}^{+g}}{\theta_{uk}^g} \quad (K.27)$$

Les résultats obtenus au chapitre II nous permettent d'écrire :

$$P_{1k}^{g,g} = - \frac{P_{\bar{u}k}^{+g}}{P_k^{+g}} \frac{\pi c^2}{\lambda_{uk}^g V_u} \left(\Sigma_{am}^g \gamma_{\beta_k}^{g,g} K_2(K_m^g c) + \frac{2}{(K_m^g)^2} \Sigma_{am}^g I_2(K_m^g c) \right) - \frac{2\pi a}{V_u} \frac{I_2(K_m^g a)}{(K_m^g)^2} \Sigma_{auk}^g \quad (K.28)$$

$$P_{\bar{u}k}^{*g} = P_{\bar{u}k}^{+g} + \frac{4}{3 \Sigma_{auk}^g (\lambda_{uk}^g)^2} \frac{(P_{\bar{u}k}^{+g})^2}{P_k^{+g}} \left[1 - \frac{1}{K_m^g \int_c^\infty K_1(K_m^g \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}^g, c) d\rho} \right] \frac{1}{1 + \frac{3 \Lambda_{k \text{ dip}}^g \Sigma_{am}^g K_2(K_m^g c)}{c}} \quad (K.29)$$

$$\gamma_{\beta_k}^{g,g} = - \frac{2}{(K_m^g)^2} \frac{I_2(K_m^g c)}{K_2(K_m^g c)} \frac{1 - \frac{K_m^g \int_c^\infty I_1(K_m^g \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}^g, c) d\rho}{c}}{3 \Lambda_{k \text{ dip}}^g \Sigma_{am}^g I_2(K_m^g c)} \frac{K_m^g \int_c^\infty K_1(K_m^g \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}^g, c) d\rho}{1 + \frac{3 \Lambda_{k \text{ dip}}^g \Sigma_{am}^g K_2(K_m^g c)}{c}} \quad (K.30)$$

$$\theta_{uk}^g = - \frac{V_u a P_{\bar{u}k}^{+g}}{3 \pi c^2 \Sigma_{auk}^g \lambda_{uk}^g \left(\frac{K_m^g \int_c^\infty K_1(K_m^g \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}^g, c) d\rho}{3 \Lambda_{k \text{ dip}}^g} + \Sigma_{am}^g K_2(K_m^g c) \right)} \quad (K.31)$$

Portons ces valeurs dans (K.27). Cela donne,

d'une part :

$$P_{1k}^{+g,g} = - \frac{P_{uk}^{+g}}{P_k^{+g}} \frac{\pi c^2}{\lambda_{uk}^g V_u} \frac{2}{K_m^g} \frac{\int_0^\infty I_1(K_m^g \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}^g, c) d\rho}{3 \Lambda_{k \text{ dip}}^g} - \frac{2\pi a}{V_u} \frac{I_1(K_m^g a)}{(K_m^g)^2} \Sigma_{auk}^g$$

et d'autre part, compte tenu de (K.20) :

$$P_{1k}^{+g,g} = - \frac{\pi c^2}{\lambda_{uk}^g V_u} \frac{2}{K_m^g} \frac{\int_0^\infty I_1(K_m^g \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}^g, c) d\rho}{3 \Lambda_{k \text{ dip}}^g} - \frac{2\pi}{(K_m^g)^2} \frac{\lambda_{uk}^g \frac{\Sigma_{am}^g}{K_m^g} \left(\Sigma_{tm}^g I_1(K_m^g c) c - \Sigma_{tuk}^g I_1(K_m^g a) a \right) - \Sigma_{auk}^g I_2(K_m^g a) a^2}{\lambda_{uk}^g V_u}$$

En suivant un raisonnement identique à celui qui a servi en première partie de cette annexe à déduire l'expression de $P_{ok}^{+g',g}$ de celle de $P_{ok}^{+g,g}$, on trouve ⁽¹⁾ :

$$P_{1k}^{+g',g} = - \frac{P_{uk}^{+g}}{P_k^{+g}} \frac{\pi c^2}{\lambda_{uk}^g V_u} \frac{2}{K_m^{g'}} \frac{\int_0^\infty I_1(K_m^{g'} \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}^g, c) d\rho}{3 \Lambda_{k \text{ dip}}^g} - \frac{2\pi a}{V_u} \frac{I_2(K_m^{g'} a)}{(K_m^{g'})^2} \Sigma_{auk}^g \quad (K.32)$$

⁽¹⁾ Les formules obtenues en annexe F de P_{uk}^{+g} , P_k^{+g} et $\Lambda_{k \text{ dip}}^g$ ne font intervenir explicitement ni Σ_{sm}^g , ni K_m^g (on suppose que le choc est isotrope dans le modérateur).

$$\hat{p}_{1k}^{+g',g} = - \frac{\pi c^2}{\lambda_{uk}^g V_u} \frac{2}{K_m^{g'}} \frac{\int_0^\infty I_1(K_m^{g'} \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}^g, c) d\rho}{3 \Lambda_{k \text{ dip}}^g}$$

$$- \frac{2 \pi}{(K_m^{g'})^2} \frac{\frac{\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{K_m^{g'}}}{\lambda_m^g K_m^{g'}} \left(\Sigma_{tm}^g I_1(K_m^{g'} c) c - \Sigma_{tuk}^g I_1(K_m^{g'} a) a \right) - \Sigma_{auk}^g I_2(K_m^{g'} a) a^2}{\lambda_{uk}^g V_u}$$

(K.33)

L'élimination de $\hat{p}_{1k}^{+g',g}$ entre (K.20) et la relation :

$$\frac{\hat{p}_{1k}^{g',g} - \hat{p}_{1k}^{+g',g}}{\beta_k^{g',g}} = - \frac{a}{4} \frac{\frac{P_{\bar{u}\bar{u}_k}^{*g} - P_{\bar{u}\bar{u}_k}^{+g}}{\theta_{uk}^g}}{P_{\bar{u}k}^{+g}},$$

résultant de (K.26), conduit à l'égalité, lorsqu'on remplace $\hat{p}_{1k}^{+g',g}$ par sa valeur tirée de (K.33) :

$$\hat{\beta}_k^{g',g} = - \frac{2}{(K_m^{g'})^2} \frac{\frac{\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{K_m^{g'}}}{\Sigma_{am}^g} \frac{I_2(K_m^{g'} c)}{K_2(K_m^{g'} c)} \frac{1 - \frac{K_m^{g'} \int_0^\infty I_1(K_m^{g'} \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}^g, c) d\rho}{c}}{3 \Lambda_{k \text{ dip}}^g \left(\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{K_m^{g'}} \right) I_2(K_m^{g'} c)}}{1 + \frac{K_m^g \int_0^\infty K_1(K_m^g \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}^g, c) d\rho}{c}} \frac{\Sigma_{am}^g K_2(K_m^g c)}{3 \Lambda_{k \text{ dip}}^g}$$

(K.34)

Portons cette valeur dans (K.26). Compte tenu de (K.29), (K.31) et (K.32), on obtient :

$$p_{1k}^{g',g} = - \frac{p_{uk}^{+g}}{p_k^{+g}} \frac{\pi c^2}{\lambda_{uk}^g v_u} \left(\sum_{am}^g \gamma_k^{g',g} K_2(K_m^g c) + 2 \left(\sum_{am}^g - \frac{1 - \delta_{g',g}}{k_g^{g'}} \right) \frac{I_2(K_m^{g'} c)}{(K_m^{g'})^2} \right) \\ - \frac{2\pi a}{V_u} \frac{I_2(K_m^{g'} a)}{(K_m^{g'})^2} \sum_{auk}^g \quad (K.35)$$

ANNEXE L

UNE EXPRESSION INTEGRALE DE $I_1(K_m \rho) \cos \alpha$

On tire de [16 B] la relation :

$$I_1(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-x \cos \alpha_0} \cos \alpha_0 d\alpha_0 \quad (L.1)$$

Compte tenu de l'égalité :

$$\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x \cos \varphi} \cos \varphi d\varphi = \int_0^{\pi} e^{-x \cos \varphi'} \cos \varphi' d\varphi' ,$$

obtenue en faisant le changement de variable $\varphi = 2\pi - \varphi'$, la relation (L.1) peut encore s'écrire :

$$I_1(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-x \cos \alpha_0} \cos \alpha_0 d\alpha_0 \quad (L.2)$$

On en déduit que :

$$I_1(K_m \rho) \cos \alpha = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-K_m \rho \cos \alpha_0} \cos (\alpha_0 + \alpha) d\alpha_0 \quad (L.3)$$

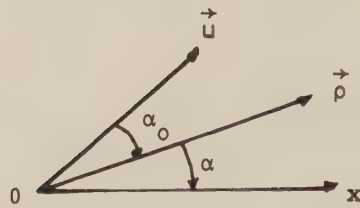
$$\text{car } \int_0^{2\pi} e^{-x \cos \alpha_0} \sin \alpha_0 d\alpha_0 = 0.$$

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire qui se déduit du rayon vecteur $\vec{\rho}$ par

une rotation de $-\alpha_0$ dans le plan.

Comme α est l'angle qui amène $\vec{\rho}$ sur Ox ,

(L.3) s'écrit :



$$I_1(K_m \rho) \cos \alpha = -\frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} du e^{-K_m \vec{\rho} \cdot \vec{u}} u_x \quad (L.4)$$

où u_x est la composante x de $\vec{u}$.

ANNEXE M

APPROXIMATION A L'ORDRE DEUX EN K_m DE LA FORMULE (IV.D.16) DU COEFFICIENT DE
DIFFUSION RADIAL THERMIQUE

On utilise les notations du chapitre IV du présent mémoire. La formule (IV.D.16) s'écrit :

$$\frac{D_r}{\frac{1}{3} \lambda_m} = \frac{\tilde{\phi}_m}{\phi_t} + \frac{3}{\lambda_m} \frac{q}{\phi_t} \frac{\beta_o}{K_m b I_1(K_m b) \left(1 - \tilde{\beta} \frac{K_m^2 S_o}{2}\right)} \left[1 - \frac{\tilde{\beta} f K_m V_m}{\beta_o 4\pi c \Delta_1(K_m c) I_1(K_m b)}\right] \quad (M.1)$$

avec

$$\tilde{\phi}_m = \frac{q}{\Sigma_{am}} \left(1 - f \frac{\Sigma_{am}}{K_m^2} \frac{3}{\lambda_m} \frac{V_m \left(\frac{I_1(K_m b)}{b} + K_m I_2(K_m b)\right)}{2\pi c \Delta_1(K_m c) I_1(K_m b)}\right) \quad (M.2)$$

$$\tilde{\beta} = - \frac{2}{K_m^2} \frac{I_2(K_m c)}{K_2(K_m c)} \frac{1 - \frac{K_m \int_c^\infty I_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho}{c}}{\frac{3 \Lambda_{dip} \Sigma_{am} I_2(K_m c)}{K_m \int_c^\infty K_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho} + 1} \quad (M.3)$$

et, compte tenu de (IV.B.19), (II.B.3.30) et (II.B.3.35),

$$\beta_o = \frac{1}{3 \Sigma_{am} K_2(K_m c)} \times \frac{\frac{\pi (\lambda_m + c) \lambda_m}{6 \Lambda_{dip}}}{1 + \frac{K_m \int_c^\infty K_1(K_m \rho) f(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho}{3 \Lambda_{dip} \Sigma_{am} K_2(K_m c)}} \quad (M.4)$$

Dans ces formules :

$$f(\rho, \Sigma_{tm}, c) = \Sigma_{sm} \lambda_m \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^2 \varphi \varepsilon_1 \left[\Sigma_{tm} (\sqrt{\rho^2 - c^2 \sin^2 \varphi} - c \cos \varphi) \right]$$

$$\varepsilon_1(x) = K i_2(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta e^{-\frac{x}{\sin \theta}}$$

et

$$\Lambda_{dip} = \frac{\pi(\lambda_m + c) \lambda_m}{6 P^+} \frac{c^2}{a^2}$$

Cette dernière quantité est formellement indépendante de K_m .

Pour fixer les idées, on prend $q = 1$, $\tilde{\phi}_m$ et ϕ_t étant proportionnels à q , ce choix n'affecte pas la valeur de $\frac{D}{\frac{1}{3} \lambda_m} r$.

La formule (M.2) peut s'écrire :

$$\tilde{\phi}_m = \phi_m + \frac{f}{\Sigma_{am}} \left(1 - \frac{\Sigma_{am}}{K_m^2} \frac{3}{\lambda_m} \frac{V_m \left(\frac{I_1(K_m b)}{b} + K_m I_2(K_m b) \right)}{2\pi c \Delta_1(K_m c) I_1(K_m b)} \right) \quad (M.5)$$

où ϕ_m est la valeur moyenne du flux ϕ_0 dans le modérateur de la cellule :

$$\phi_m = (1 - f) \frac{1}{\Sigma_{am}}$$

Par étapes successives, il est possible de décomposer (M.5) en éléments qui se prêtent aisément à un développement à l'ordre deux en puissance de K_m :

$$\phi_m^2 = \phi_m + \frac{3}{\lambda_m} \frac{f}{K_m^2} \left[\frac{K_m^2}{\Sigma_{am}} \frac{\lambda_m}{3} - 1 + \frac{b^2 - c^2}{2 bc \Delta_1(K_m c)} \left(\frac{2 bc \Delta_1(K_m c)}{b^2 - c^2} - 1 + 1 - \frac{I_1(K_m b) + K_m b I_2(K_m b)}{I_1(K_m b)} \right) \right] \quad (M.6)$$

Supposons pour simplifier le choc isotrope dans le modérateur. Il est facile de montrer alors (voir fin Annexe H) que ⁽¹⁾ :

$$\frac{K_m^2}{\Sigma_{am}} \frac{\lambda_m}{3} = 1 + \frac{14}{15} \frac{K_m^2}{\Sigma_{tm}^2} + O(K_m^4) \quad (M.7)$$

Remplaçons dans $\Delta_1(K_m c)$ ($= I_1(K_m b) K_1(K_m c) - K_1(K_m b) I_1(K_m c)$) I_1 et K_1 par leurs développements à l'origine respectifs (cf. [16B]) :

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} + O(x^5)$$

$$K_1(x) = (\gamma + \ln \frac{x}{2}) I_1(x) + \frac{1}{x} - \frac{x}{4} - \frac{5x^3}{64} + O(x^5)$$

(γ est la constante d'EULER),

il vient :

$$\Delta_1(K_m c) = \frac{1}{2} \frac{b^2 - c^2}{bc} + \frac{K_m^2}{4} \left[bc \ln \frac{c}{b} + \frac{b^4 - c^4}{4bc} \right] + O(K_m^4)$$

soit, après multiplication des deux membres par $\frac{2bc}{b^2 - c^2}$:

⁽¹⁾ Le symbole $O(x^n)$ désigne une fonction de x dont le quotient par x^n tend vers une valeur finie quand x tend vers zéro.

$$\frac{2 bc \Delta_1(K_m c)}{b^2 - c^2} = 1 + \frac{K_m^2}{2} \left[bc \ln \frac{c}{b} + \frac{b^4 - c^4}{4bc} \right] \frac{bc}{b^2 - c^2} + O(K_m^4) \quad (M.8)$$

Le développement à l'origine de la fonction de Bessel modifiée d'ordre deux I_2 s'écrit :

$$I_2(x) = \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{96} + O(x^6)$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{I_1(K_m b) + K_m b I_2(K_m b)}{I_1(K_m b)} = 1 + \frac{K_m^2 b^2}{4} + O(K_m^4) \quad (M.9)$$

Compte tenu de ces égalités, la relation (M.6) donne :

$$\tilde{\phi}_m = \phi_m + \frac{3}{\lambda_m} f \left[\frac{14}{15} \lambda_m^2 + \frac{1}{2} \left(bc \ln \frac{c}{b} + \frac{b^4 - c^4}{4 bc} \right) \frac{bc}{b^2 - c^2} - \frac{b^4}{4} \right] + O(K_m^2)$$

(M.10)

On a remplacé Σ_{tm} par $\frac{1}{\lambda_m}$ (le choc étant supposé isotrope dans le modérateur).

On peut vérifier, en suivant un processus analogue à celui qui a conduit à la relation (M.6), l'identité :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Sigma_{am}} \left(1 - \frac{\tilde{\beta}}{\beta_o} \frac{f K_m V_m}{4 \pi c \Delta_1(K_m c) I_1(K_m b)} \right) &= \phi_m + \frac{f}{\Sigma_{am}} \left(1 - \frac{\tilde{\beta}}{\beta_o} \right) \\ &+ \frac{f}{\Sigma_{am}} \frac{\tilde{\beta}}{\beta_o} \frac{b^2 - c^2}{2 bc \Delta_1(K_m c)} \left(\frac{2 bc \Delta_1(K_m c)}{b^2 - c^2} - 1 + 1 - \frac{K_m b}{2 I_1(K_m b)} \right) \quad (M.11) \end{aligned}$$

En annexe H, on montre (toujours dans l'hypothèse du choc isotrope dans le modérateur) que :

$$\frac{\gamma}{\beta_0} = 1 - \frac{\Sigma_{am}}{\Sigma_{tm}} + \frac{3}{4} \lambda_m K_m^2 \frac{\left(\frac{4}{5} \lambda_m^3 + \frac{3}{4} c \lambda_m^2 + \frac{5}{12} c^2 \lambda_m + \frac{c^3}{6} \right)}{(\lambda_m + c) \lambda_m} - \frac{9}{2} \frac{\Sigma_{am} c^2 \Lambda_{dip}}{\pi (\lambda_m + c) \lambda_m} + O(K_m^4) \quad (M.12)$$

Dans (M.11), on remplace $\frac{2 bc \Delta_1(K_m c)}{b^2 - c^2}$ et $\frac{\gamma}{\beta_0}$ par leurs valeurs, respectivement tirées de (M.8) et (M.12) et l'on développe I_1 à l'origine. Il vient, compte tenu de (M.7) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Sigma_{am}} \left(1 - \frac{\gamma}{\beta_0} \frac{f K_m V_m}{4 \pi c \Delta_1(K_m c) I_1(K_m b)} \right) &= \phi_m + f \left(\lambda_m - \frac{9}{4} \frac{\left(\frac{4}{5} \lambda_m^3 + \frac{3}{4} c \lambda_m^2 + \frac{5}{12} c^2 \lambda_m + \frac{c^3}{6} \right)}{(\lambda_m + c) \lambda_m} \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{2} \frac{c^2 \Lambda_{dip}}{\pi (\lambda_m + c) \lambda_m} \right) + \frac{3}{\lambda_m} f \left(\frac{1}{2} \left(bc \ln \frac{c}{b} + \frac{b^4 - c^4}{4bc} \right) \frac{bc}{(b^2 - c^2)} + \frac{b^2}{8} \right) \\ &\quad + O(K_m^2) \quad (M.13) \end{aligned}$$

Cette relation peut encore s'écrire, en tirant parti de la formule (M.10) :

$$\frac{1}{\Sigma_{am}} \left(1 - \frac{\gamma}{\beta_0} \frac{f K_m V_m}{4 \pi c \Delta_1(K_m c) I_1(K_m b)} \right) = \gamma_m + \delta \gamma_m \quad (M.14)$$

avec

$$\begin{aligned} \delta \gamma_m &= f \left[-\frac{9}{5} \lambda_m + \frac{9}{8} \frac{b^2}{\lambda_m} - \frac{9}{4} \frac{\left(\frac{4}{5} \lambda_m^3 + \frac{3}{4} c \lambda_m^2 + \frac{5}{12} c^2 \lambda_m + \frac{c^3}{6} \right)}{(\lambda_m + c) \lambda_m} \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{2} \frac{c^2 \Lambda_{dip}}{\pi (\lambda_m + c) \lambda_m} \right] + O(K_m^2) \quad (M.15) \end{aligned}$$

En annexe F il est signalé que la quantité S_0 peut être approximée à l'ordre $K_m^2 \ln K_m$ près par la formule :

$$S_0 = \frac{K_1(K_m b)}{I_1(K_m b)} + \frac{\frac{3}{2} - I_f}{2}$$

dans laquelle I_f représente le facteur de forme de la cellule [34].

Dans ces conditions, il est facile de voir qu'on peut remplacer

le facteur de $\frac{1}{\Sigma_{am}} \left(1 - \frac{\gamma}{\beta_0} \frac{f K_m V_m}{4 \pi c \Delta_1(K_m c) I_1(K_m b)} \right)$ dans (M.1), par la somme :

$$\frac{2 \frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{b^2}}{\left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{b^2}\right)} \frac{1}{\phi_t} + O(K_m^2 \ln K_m)$$

(q étant pris égal à un).

Le développement de γ en puissances de K_m n'est en effet pas singulier (voir fin de l'annexe H).

Il en résulte que l'on peut mettre (M.1) sous la forme (voir (M.14)) :

$$\frac{D_r}{\frac{1}{3} \lambda_m} = \frac{\gamma_m}{\phi_t} + \frac{2 \frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{b^2}}{1 - \frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{b^2}} \frac{\gamma_m + \delta \gamma_m}{\phi_t} + O(K_m^2 \ln K_m)$$

Cette égalité peut encore s'écrire :

$$\frac{D_r}{\frac{1}{3} \lambda_m} = \frac{\tilde{\phi}_m}{\phi_t} \frac{1 + \frac{\tilde{\beta}}{b^2}}{1 - \frac{\tilde{\beta}}{b^2}} + \frac{2 \frac{\tilde{\beta}}{b^2}}{1 - \frac{\tilde{\beta}}{b^2}} \frac{\delta \tilde{\phi}_m}{\phi_t} + O(K_m^2 \ln K_m)$$

ou

$$\frac{D_r}{\frac{1}{3} \lambda_m} = \frac{\tilde{\phi}_m + \delta \tilde{\phi}_m}{\phi_t} \frac{1 + \frac{\tilde{\beta}}{b^2}}{1 - \frac{\tilde{\beta}}{b^2}} - \frac{\delta \tilde{\phi}_m}{\phi_t} + O(K_m^2 \ln K_m)$$

ANNEXE N

EXPRESSION DU COEFFICIENT DE DIFFUSION DE BENOIST EN FONCTION DES PARAMETRES
HETEROGENES LORSQUE L'ON SUPPOSE LE FLUX DE STRUCTURE FINE D'ORDRE ZERO
ISOTROPE ET UNIFORME DANS CHACUN DES MILIEUX DE LA CELLULE

Les notations et conventions adoptées sont celles du chapitre IV.
Nous supposons en outre que la cellule est cylindrisée.

Soient ϕ_i la valeur moyenne de ϕ_0 dans le milieu i de la cellule et δ_i la fonction égale à un à l'intérieur de ce milieu et nulle partout ailleurs. Supposer l'isotropie et l'uniformité du flux d'ordre zéro dans chacun des milieux de la cellule, revient à remplacer v_0 dans l'équation (IV.A.5) par la somme $\sum_i \delta_i \frac{\phi_i}{4\pi}$.

On pose :

$$v_{1x} = \lambda_m \frac{\phi_m}{4\pi} \Omega_x + \xi_{1x} \quad (N.1)$$

Compte tenu de la linéarité de l'équation de BOLTZMANN, il est clair que dans la cellule ξ_{1x} est un flux angulaire qui obéit, dans le modérateur, à l'équation du transport sans source, dans la cavité, à l'équation :

$$\text{div } \vec{\Omega} \xi_{1x} = \frac{\phi_c}{4\pi} \Omega_x \quad (N.2)$$

et dans le barreau, à l'équation :

$$\text{div } \vec{\Omega} \xi_{1x} + \Sigma_{tu} \xi_{1x} = \frac{\Sigma_{su}}{4\pi} F_{1x} + \left(\phi_u - \phi_m \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) \frac{\Omega_x}{4\pi} \quad (N.3)$$

$$\text{avec } F_{1x} = \int_{(4\pi)} \xi_{1x} d\Omega.$$

Compte tenu de l'antisymétrie des sources de v_{1x} par rapport au centre de la cellule, l'intégrale sur l'angle solide (4π) de ξ_{1x} , soit F_{1x} , doit s'annuler au bord de la cellule. En effet, on a :

$$\int_{(4\pi)} \frac{\lambda_m}{4\pi} \phi_m \Omega_x d\Omega = 0$$

Le flux F_{1x} admet donc (cf. (IV.C.12)) pour expression asymptotique, dans le modérateur :

$$F_{1x_{as}} = K_m \left[\beta_{cb} \phi_c + \beta_{ub} \left(\phi_u - \phi_m \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) \right] \Delta_1(K_m \rho) \cos \alpha \quad (N.4)$$

D'un autre côté, la formule théorique du coefficient de diffusion de BENOIST s'écrit (cf. (IV.D.1)) :

$$D_{ox} = \frac{\int_{S_{cel}} x \vec{j}_{1x} \cdot \vec{n} dS}{\int_{V_{cel}} \phi_o dV} \quad (N.5)$$

En se reportant à la relation (N.1), si l'on admet que ξ_{1x} peut être remplacé à la frontière de la cellule par sa partie asymptotique, on voit, en utilisant la loi de FICK, que (cf. page 124) :

$$\vec{j}_{1x} = \frac{\lambda_m}{3} \phi_m \vec{W} + \frac{\Sigma_{am}}{K_m b} \left[\beta_{cb} \phi_c + \beta_{ub} \left(\phi_u - \phi_m \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) \right] \vec{n} \cos \alpha$$

où $\vec{W}$ est le vecteur unitaire de l'axe Ox .

Par substitution de cette expression dans (N.5), il vient :

$$D_{ox} = \frac{\pi b^2 \left[\frac{\lambda_m}{3} \phi_m + \left[\beta_{cb} \phi_c + \beta_{ub} \left(\phi_u - \phi_m \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) \right] \frac{\Sigma_{am}}{K_m b} \right]}{\int_{V_{cel}} \phi_o dV} \quad (N.6)$$

En remplaçant β_{ub} , β_{cb} et $\int_{V_{cel}} \phi_0 dV$ par leurs valeurs respectivement tirées de (IV.C.13), (IV.C.14) et (IV.D.11), on obtient finalement :

$$\frac{D_{ox}}{\frac{1}{3} \lambda_m} = \frac{\phi_m}{\phi_t} + \frac{3}{\lambda_m} \frac{\Sigma_{am}}{K_m b} \frac{\left(\beta_c \phi_c + \beta_u \left(\phi_u - \phi_m \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) \right)}{\phi_t \left(1 - \beta \frac{K_m^2}{2} S_o \right) I_1(K_m b)} \quad (N.7)$$

Remarque : Cette formule englobe le terme principal, calculé par BENOIST dans [12], et la correction d'absorption. L'expression de cette dernière peut donc être obtenue en retranchant de (N.7) la formule proposée par BENOIST dans le formulaire de [12].

Compte tenu de (N.1), (N.4) et (N.6), le flux scalaire ϕ_{1x} , intégrale sur l'angle solide (4π) de v_{1x} , admet pour expression asymptotique dans le modérateur de la cellule :

$$\phi_{1x_{as}} = \frac{K_m^2}{\Sigma_{am}} \frac{\lambda_m}{3} \phi_t b \left(\frac{D_{ox}}{\frac{1}{3} \lambda_m} - \frac{\phi_m}{\phi_t} \right) \Delta_1(K_m \rho) \cos \alpha \quad (N.8)$$

ANNEXE 0

Première partie

SOLUTION ASYMPTOTIQUE DE L'EQUATION DE BOLTZMANN DANS L'HYPOTHESE DU CHOC LINEAIREMENT ANISOTROPE

On se limite au schéma monocinétique. On considère un milieu, noté m , homogène, infini et faiblement capturant au centre duquel se trouve une source unité ponctuelle isotrope. Le flux obéit à l'équation :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\text{grad}} \, v + \Sigma_{tm} \, v = \frac{\Sigma_{sm} \, \phi}{4\pi} + \frac{3}{4\pi} \, \bar{\mu} \, \Sigma_{sm} \, \vec{J} \cdot \vec{\Omega} + \frac{\delta(\vec{r})}{4\pi} \quad (0.1)$$

avec
$$\phi = \int_{(4\pi)} v \, d\Omega$$

et
$$\vec{J} = \int_{(4\pi)} \vec{\Omega} \, v \, d\Omega$$

On applique la transformation de FOURIER :

$$F(\vec{b}, \vec{\Omega}) = \int_{R^3} v(\vec{r}, \vec{\Omega}) \, e^{i\vec{b} \cdot \vec{r}} \, d\vec{r}$$

Il vient :

$$(-i\vec{b} \cdot \vec{\Omega} + \Sigma_{tm}) \, F(\vec{b}, \vec{\Omega}) = \frac{\Sigma_{sm} \, F(\vec{b})}{4\pi} + \frac{3}{4\pi} \, \bar{\mu} \, \Sigma_{sm} \, \vec{J}(\vec{b}) \cdot \vec{\Omega} + \frac{1}{4\pi} \quad (0.2)$$

On a posé :

$$F(\vec{b}) = \int_{(4\pi)} F(\vec{b}, \vec{\Omega}) \, d\Omega \quad (0.3)$$

$$\vec{J}(\vec{b}) = \int_{(4\pi)} \vec{\Omega} F(\vec{b}, \vec{\Omega}) d\Omega \quad (0.4)$$

En intégrant (0.2) sur l'angle solide (4π) , on obtient :

$$-i\vec{b} \cdot \vec{J}(\vec{b}) + \Sigma_{am} F(\vec{b}) = 1 \quad (0.5)$$

De (0.2), on tire :

$$F(\vec{b}, \vec{\Omega}) = \frac{\Sigma_{sm} F(\vec{b}) + 3 \bar{\mu} \Sigma_{sm} \vec{J}(\vec{b}) \cdot \vec{\Omega} + 1}{4 \pi (\Sigma_{tm} - i\vec{b} \cdot \vec{\Omega})} \quad (0.6)$$

Par intégration sur l'angle solide (4π) , il vient⁽¹⁾ :

$$F(\vec{b}) = \frac{\Sigma_{sm}}{b} F(\vec{b}) \operatorname{arctg} \frac{b}{\Sigma_{tm}} - 3 i \bar{\mu} \Sigma_{sm} \vec{J}(\vec{b}) \cdot \frac{\vec{b}}{b^2} \left(-1 + \frac{\Sigma_{tm}}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{\Sigma_{tm}} \right) + \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{\Sigma_{tm}} \quad (0.7)$$

(1)

En effet, on a :

$$\int_{(4\pi)} d\Omega \frac{1}{4 \pi (\Sigma_{tm} - i\vec{b} \cdot \vec{\Omega})} = \frac{1}{2 \Sigma_{tm}} \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{1 - i \frac{b}{\Sigma_{tm}} \mu}$$

Par ailleurs, [38] nous donne :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{1 - i a \mu} = \frac{2}{a} \operatorname{arctg} a$$

On peut donc écrire :

suite page suivante.

En remplaçant dans (0.7) - $i\vec{b} \cdot \vec{J}(\vec{b})$ par sa valeur tirée de (0.5), on trouve :

$$F(\vec{b}) = \frac{\Sigma_{sm}}{b} F(\vec{b}) \operatorname{arctg} \frac{b}{\Sigma_{tm}} + 3 \bar{\mu} \frac{\Sigma_{sm}}{b^2} (1 - \Sigma_{am} F(\vec{b})) \left(-1 + \frac{\Sigma_{tm}}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{\Sigma_{tm}} \right) + \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{\Sigma_{tm}} \quad (0.8)$$

On en déduit que :

$$F(\vec{b}) = \frac{\frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{\Sigma_{tm}} - \frac{3 \bar{\mu} \Sigma_{am}}{b^2} \left(1 - \frac{\Sigma_{tm}}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{\Sigma_{tm}} \right)}{1 - 3 \bar{\mu} \frac{\Sigma_{sm}}{b^2} \Sigma_{am} - \frac{\Sigma_{sm}}{b} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{\Sigma_{tm}} \right) \left(1 - 3 \bar{\mu} \frac{\Sigma_{tm} \Sigma_{am}}{b^2} \right)} \quad (0.9)$$

suite du renvoi de la page précédente.

$$\int_{(4\pi)} d\Omega \frac{1}{4\pi(\Sigma_{tm} - i\vec{b} \cdot \vec{\Omega})} = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{\Sigma_{tm}}$$

D'autre part, il est clair que :

$$\int_{(4\pi)} d\Omega \frac{\vec{\Omega}}{4\pi(\Sigma_{tm} - i\vec{b} \cdot \vec{\Omega})} = \frac{\vec{b}}{b^2} \int_{(4\pi)} \frac{\vec{b} \cdot \vec{\Omega}}{4\pi(\Sigma_{tm} - i\vec{b} \cdot \vec{\Omega})} d\Omega$$

Pour évaluer $\int_{(4\pi)} d\Omega \frac{\vec{b} \cdot \vec{\Omega}}{4\pi(\Sigma_{tm} - i\vec{b} \cdot \vec{\Omega})}$, on décompose $\frac{\vec{b} \cdot \vec{\Omega}}{4\pi(\Sigma_{tm} - i\vec{b} \cdot \vec{\Omega})}$ en deux termes :

$$\frac{\vec{b} \cdot \vec{\Omega}}{4\pi(\Sigma_{tm} - i\vec{b} \cdot \vec{\Omega})} = \frac{1}{i} \left(-\frac{1}{4\pi} + \frac{\Sigma_{tm}}{4\pi(\Sigma_{tm} - i\vec{b} \cdot \vec{\Omega})} \right)$$

Compte tenu de ce qui précède, on obtient :

$$\int_{(4\pi)} d\Omega \frac{\vec{\Omega}}{4\pi(\Sigma_{tm} - i\vec{b} \cdot \vec{\Omega})} = \frac{\vec{b}}{ib^2} \left(-1 + \frac{\Sigma_{tm}}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{\Sigma_{tm}} \right)$$

On désigne par F_0 la transformée de FOURIER du flux scalaire sans choc ϕ_0 . Il est facile de voir que :

$$F_0(b) = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{\Sigma_{tm}} \quad (0.10)$$

La transformée inverse de F_0 a pour expression (cf. [14]) :

$$\phi_0(\vec{r}) = \frac{e^{-\Sigma_{tm} r}}{4 \pi r^2}$$

Si l'on retranche de (0.9) l'expression (0.10) de F_0 , on obtient pour la transformée F_1 du flux ϕ_1 des neutrons ayant subi au moins une collision :

$$F_1(b) = \frac{\frac{\Sigma_{sm}}{b^2} (1 - 3 \bar{\mu} \frac{\Sigma_{tm} \Sigma_{am}}{b^2}) (\operatorname{arctg} \frac{b}{\Sigma_{tm}})^2 - \frac{3 \bar{\mu} \Sigma_{sm}}{b^2} (1 - \frac{\Sigma_{tm} + \Sigma_{am}}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{\Sigma_{tm}})}{1 - 3 \bar{\mu} \frac{\Sigma_{sm}}{b^2} \Sigma_{am} - \frac{\Sigma_{sm}}{b} (1 - 3 \bar{\mu} \frac{\Sigma_{tm} \Sigma_{am}}{b^2}) \operatorname{arctg} \frac{b}{\Sigma_{tm}}}$$

Cette expression ne dépend que du module de b . De plus, c'est une fonction paire de b . Sa transformée inverse s'écrit, par suite :

$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} b F_1(b) \frac{\sin b r}{r} db$$

Compte tenu de l'égalité : $\sin b r = \frac{e^{ibr} - e^{-ibr}}{2i}$, il vient facilement :

$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2 i r} \int_{-\infty}^{+\infty} b F_1(b) e^{ibr} db \quad (0.11)$$

On songe naturellement à la méthode des résidus pour calculer une telle intégrale. La fonction intégrée $b F_1(b) e^{ibr}$ possède deux sortes de points singuliers :

1) Elle a deux pôles d'ordre un. Ces pôles correspondent aux zéros du dénominateur de F_1 . Le milieu étant par hypothèse faiblement capturant ($\Sigma_{am} \ll \Sigma_{tm}$), ces zéros sont au nombre de deux et sont purement imaginaires (cf. [39]) ; leur module K_m est solution de l'équation :

$$1 + 3 \bar{\mu} \frac{\Sigma_{sm} \Sigma_{am}}{K_m^2} = \frac{\Sigma_{sm} + \Sigma_{tm} \frac{\Sigma_{sm} \Sigma_{am}}{K_m^2}}{K_m} \operatorname{argth} \frac{K_m}{\Sigma_{tm}} \quad (0.12)$$

(car $\operatorname{arctg} ik = i \operatorname{argth} k$) et on a de plus :

$$K_m \ll \Sigma_{tm}$$

2) Elle admet $+i \Sigma_{tm}$ et $-i \Sigma_{tm}$ pour points de branchement logarithmique. Cela résulte de l'égalité :

$$\operatorname{arctg} \frac{b}{\Sigma_{tm}} = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + i \frac{b}{\Sigma_{tm}}}{1 - i \frac{b}{\Sigma_{tm}}}$$

Le théorème des résidus nous permet d'écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} db \, b F_1(b) e^{ibr} = 2\pi i B_1 - \int_C dz \, z F_1(z) e^{izr}$$

On désigne par F_0 la transformée de FOURIER du flux scalaire sans choc ϕ_0 . Il est facile de voir que :

$$F_0(b) = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{\Sigma_{tm}} \quad (0.10)$$

La transformée inverse de F_0 a pour expression (cf. [14]) :

$$\phi_0(\vec{r}) = \frac{e^{-\Sigma_{tm} r}}{4 \pi r^2}$$

Si l'on retranche de (0.9) l'expression (0.10) de F_0 , on obtient pour la transformée F_1 du flux ϕ_1 des neutrons ayant subi au moins une collision :

$$F_1(b) = \frac{\frac{\Sigma_{sm}}{b^2} (1 - 3 \bar{\mu} \frac{\Sigma_{tm} \Sigma_{am}}{b^2}) (\operatorname{arctg} \frac{b}{\Sigma_{tm}})^2 - \frac{3 \bar{\mu} \Sigma_{sm}}{b^2} (1 - \frac{\Sigma_{tm} + \Sigma_{am}}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{\Sigma_{tm}})}{1 - 3 \bar{\mu} \frac{\Sigma_{sm}}{b^2} \Sigma_{am} - \frac{\Sigma_{sm}}{b} (1 - 3 \bar{\mu} \frac{\Sigma_{tm} \Sigma_{am}}{b^2}) \operatorname{arctg} \frac{b}{\Sigma_{tm}}}$$

Cette expression ne dépend que du module de b . De plus, c'est une fonction paire de b . Sa transformée inverse s'écrit, par suite :

$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} b F_1(b) \frac{\sin b r}{r} db$$

Compte tenu de l'égalité : $\sin b r = \frac{e^{ibr} - e^{-ibr}}{2i}$, il vient facilement :

$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2 i r} \int_{-\infty}^{+\infty} b F_1(b) e^{ibr} db \quad (0.11)$$

On songe naturellement à la méthode des résidus pour calculer une telle intégrale. La fonction intégrée $b F_1(b) e^{1br}$ possède deux sortes de points singuliers :

1) Elle a deux pôles d'ordre un. Ces pôles correspondent aux zéros du dénominateur de F_1 . Le milieu étant par hypothèse faiblement capturant ($\Sigma_{am} \ll \Sigma_{tm}$), ces zéros sont au nombre de deux et sont purement imaginaires (cf. [39]) ; leur module K_m est solution de l'équation :

$$1 + 3 \bar{\mu} \frac{\Sigma_{sm} \Sigma_{am}}{K_m^2} = \frac{\Sigma_{sm} + \Sigma_{tm} \frac{\Sigma_{sm} \Sigma_{am}}{K_m^2}}{K_m} \operatorname{argth} \frac{K_m}{\Sigma_{tm}} \quad (0.12)$$

(car $\operatorname{arctg} ik = i \operatorname{argth} k$) et on a de plus :

$$K_m \ll \Sigma_{tm}$$

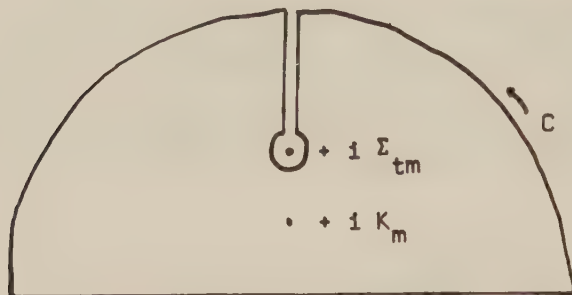
2) Elle admet $+i \Sigma_{tm}$ et $-i \Sigma_{tm}$ pour points de branchement logarithmique. Cela résulte de l'égalité :

$$\operatorname{arctg} \frac{b}{\Sigma_{tm}} = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + i \frac{b}{\Sigma_{tm}}}{1 - i \frac{b}{\Sigma_{tm}}}$$

Le théorème des résidus nous permet d'écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} db \, b F_1(b) e^{1br} = 2 \pi i B_1 - \int_C dz \, z F_1(z) e^{1zr}$$

où B_1 est le résidu de $z F_1(z) e^{izr}$ en $+ i K_m$ et C^∞ le contour (décrit dans le sens direct, voir figure) formé en reliant le demi-cercle de rayon infini du demi-plan supérieur à une petite boucle entourant le point de branchement $+ i \Sigma_{tm}$ par un lacet longeant l'axe imaginaire. Il est facile de voir en ap-



pliquant le lemme de JORDAN que l'intégrale le long du demi-cercle de rayon infini est nulle. En effet $|z F_1(z)|$ tend vers zéro en $\frac{1}{|z|}$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini.

Il n'est pas nécessaire de pousser plus loin les calculs pour se rendre compte que le résidu B_1 donne naissance à un flux variant avec la distance à la source selon la loi⁽¹⁾ :

$$\frac{e^{-K_m r}}{r}$$

et que l'intégration le long du lacet conduit à un flux admettant la forme intégrale :

$$\int_0^1 \frac{dv}{N(v)} \frac{e^{-\frac{\Sigma_{tm} r}{v}}}{r}$$

Il est aisé de vérifier que le flux sans choc peut également être mis sous cette forme intégrale avec :

$$N(v) = \frac{4 \pi v^2}{\Sigma_{tm}}$$

(1)

Il est intéressant de constater que ce flux obéit à l'équation d'onde $\Delta \phi - K_m^2 \phi = 0$ en géométrie sphérique.

Il est manifeste que les exponentielles d'argument $-\frac{\Sigma_{tm}}{v} r$ où $0 \leq v \leq 1$ s'affaiblissent beaucoup plus vite que l'exponentielle d'argument $K_m r$ puisque : $K_m \ll \Sigma_{tm}$. C'est pourquoi le flux résultant du calcul du résidu B_1 a été appelé solution asymptotique et que par opposition les autres flux (dont le flux sans choc) sont considérés comme une superposition de transitoires.

Si l'on compare ces résultats à ceux obtenus lorsque le choc est isotrope (cf. [14]), on voit que l'équation (II.A.5) doit être remplacée par l'équation (0.12). On vérifie que lorsque $\bar{\mu} = 0$, (0.12) redonne bien (II.A.5).

Seconde partie

RECHERCHE D'UNE SOLUTION PARTICULIERE DE L'EQUATION

$$\vec{\Omega} \cdot \text{grad } v + \Sigma_{tm} v = \frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} \phi + \frac{3}{4\pi} \bar{\mu} \Sigma_{sm} \vec{j} \cdot \vec{\Omega} + \frac{e^{-\kappa}}{4\pi} \vec{u} \cdot \vec{r} \quad (0.15)$$

avec $\kappa \neq K_m$ et $\kappa > 0$

La linéarité de l'équation (sans source) suggère de rechercher une solution particulière de la forme $k h(\vec{u}, \vec{\Omega}) e^{-\kappa \vec{u} \cdot \vec{r}}$ où k est une constante choisie de telle sorte que :

$$\int_{(4\pi)} h(\vec{u}, \vec{\Omega}) d\Omega = 1 \quad (0.16)$$

Si l'on remplace v dans (0.15) par une expression de cette forme, on obtient :

$$(-\vec{\Omega} \cdot \vec{u} \kappa + \Sigma_{tm}) k h(\vec{u}, \vec{\Omega}) = k \frac{\Sigma_{sm}}{4\pi} + \frac{3}{4\pi} k \bar{\mu} \Sigma_{sm} \vec{g} \cdot \vec{\Omega} + \frac{1}{4\pi} \quad (0.17)$$

On a posé :

$$\vec{g}(\vec{u}) = \int_{(4\pi)} d\Omega \vec{\Omega} h(\vec{u}, \vec{\Omega})$$

On intègre (0.17) sur l'angle solide (4π) . On obtient :

$$-\kappa \vec{u} \cdot \vec{g} + \Sigma_{am} = \frac{1}{k} \quad (0.18)$$

De (0.17), on tire

$$h(\vec{u}, \vec{\Omega}) = \frac{\Sigma_{sm} + 3 \bar{\mu} \Sigma_{sm} \vec{g} \cdot \vec{\Omega} + \frac{1}{k}}{4\pi (\Sigma_{tm} - \kappa \vec{u} \cdot \vec{\Omega})} \quad (0.19)$$

La condition (0.16) équivaut à :

$$\int_{(4\pi)} d\Omega \frac{\Sigma_{sm} + 3 \bar{\mu} \Sigma_{sm} \vec{g} \cdot \vec{\Omega} + \frac{1}{k}}{4\pi (\Sigma_{tm} - \kappa \vec{u} \cdot \vec{\Omega})} d\Omega = 1$$

Après intégration, on trouve⁽¹⁾, compte tenu de (0.18) :

$$\frac{\Sigma_{sm}}{\kappa} \operatorname{argth} \frac{\kappa}{\Sigma_{tm}} + 3 \bar{\mu} \frac{\Sigma_{sm}}{\kappa^2} (\Sigma_{am} - \frac{1}{k}) (-1 + \frac{\Sigma_{tm}}{\kappa} \operatorname{argth} \frac{\kappa}{\Sigma_{tm}}) + \frac{1}{\kappa \kappa_0} \operatorname{argth} \frac{\kappa}{\Sigma_{tm}} = 1 \quad (0.20)$$

⁽¹⁾ En effet, on a :

$$\int_{(4\pi)} d\Omega \frac{1}{4\pi (\Sigma_{tm} - \kappa \vec{u} \cdot \vec{\Omega})} = \frac{1}{2 \Sigma_{tm}} \int_{-1}^{+1} d\mu \frac{1}{1 - \frac{\kappa}{\Sigma_{tm}} \mu}$$

Par ailleurs, [38] nous donne :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{1 - a \mu} = \frac{2}{a} \operatorname{argth} a$$

On peut donc écrire :

$$\int_{(4\pi)} d\Omega \frac{1}{4\pi (\Sigma_{tm} - \kappa \vec{u} \cdot \vec{\Omega})} = \frac{1}{\kappa} \operatorname{argth} \frac{\kappa}{\Sigma_{tm}}$$

D'autre part, il est clair que :

suite page suivante.

La décomposition de $\frac{\Sigma_{sm}}{\kappa} \operatorname{argth} \frac{\kappa}{\Sigma_{tm}}$ en l'expression équivalente :

$\frac{\Sigma_{tm}}{\kappa} \operatorname{argth} \frac{\kappa}{\Sigma_{tm}} - \frac{\Sigma_{am}}{\kappa} \operatorname{argth} \frac{\kappa}{\Sigma_{tm}}$ conduit à mettre (0.20) sous la forme :

$$\left(\frac{1}{\kappa} - \Sigma_{am}\right) \left[\frac{1}{\kappa} \operatorname{argth} \frac{\kappa}{\Sigma_{tm}} + \frac{3 \bar{\mu} \Sigma_{sm}}{\kappa^2} \left(1 - \frac{\Sigma_{tm}}{\kappa} \operatorname{argth} \frac{\kappa}{\Sigma_{tm}}\right) \right] = 1 - \frac{\Sigma_{tm}}{\kappa} \operatorname{argth} \frac{\kappa}{\Sigma_{tm}}$$

d'où l'égalité :

$$\frac{1}{\kappa} = \Sigma_{am} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{\kappa}{\operatorname{argth} \frac{\kappa}{\Sigma_{tm}}} - \Sigma_{tm}} + \frac{3 \bar{\mu} \Sigma_{sm}}{\kappa^2}} \quad (0.21)$$

suite du renvoi de la page précédente.

$$\int_{(4\pi)} d\Omega \frac{\vec{\Omega}}{4\pi(\Sigma_{tm} - \kappa \vec{u} \cdot \vec{\Omega})} = \vec{u} \int_{(4\pi)} d\Omega \frac{\vec{u} \cdot \vec{\Omega}}{4\pi(\Sigma_{tm} - \kappa \vec{u} \cdot \vec{\Omega})}$$

Pour évaluer $\int_{(4\pi)} d\Omega \frac{\vec{u} \cdot \vec{\Omega}}{4\pi(\Sigma_{tm} - \kappa \vec{u} \cdot \vec{\Omega})}$ on décompose $\frac{\vec{u} \cdot \vec{\Omega}}{4\pi(\Sigma_{tm} - \kappa \vec{u} \cdot \vec{\Omega})}$ en deux termes :

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{\Omega}}{4\pi(\Sigma_{tm} - \kappa \vec{u} \cdot \vec{\Omega})} = \frac{1}{\kappa} \left(-\frac{1}{4\pi} + \frac{\Sigma_{tm}}{4\pi(\Sigma_{tm} - \kappa \vec{u} \cdot \vec{\Omega})} \right)$$

Compte tenu de ce qui précède, on obtient finalement :

$$\int_{(4\pi)} d\Omega \frac{\vec{\Omega}}{4\pi(\Sigma_{tm} - \kappa \vec{u} \cdot \vec{\Omega})} = \frac{\vec{u}}{\kappa} \left(-1 + \frac{\Sigma_{tm}}{\kappa} \operatorname{argth} \frac{\kappa}{\Sigma_{tm}} \right)$$

Si l'on se souvient du raisonnement suivi en annexe J, on voit aisément qu'il suffit de changer, dans la conclusion de cette annexe, la relation (J.4) par la relation (0.21) pour prendre en compte le choc linéairement anisotrope. On peut remarquer que lorsque $\bar{\mu}$ est égal à zéro, (0.21) se confond avec (J.4). On peut également vérifier que si κ satisfait à l'équation (0.12), le second membre de la relation (0.21) est nul (donc κ est indéterminé). C'est pourquoi on a supposé $\kappa \neq K_m$.

ANNEXE P

FORMULE DONNANT L'ACCROISSEMENT DE NOIRCEUR D'UN CANAL EN PRESENCE DE FUITES AXIALES

1. Accroissement de la noirceur d'un canal situé dans la cellule fermée d'un réseau périodique

Les notations et conventions adoptées sont celles du chapitre V, section B. On ne s'intéresse qu'aux canaux comportant deux milieux concentriques : un barreau de combustible plein entouré d'une cavité. On admet la validité de la formule du coefficient de diffusion axial proposée⁽¹⁾ par BENOIST, à la fin de sa thèse [12]. Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{D}{\frac{1}{3} \lambda_m} = 1 + \frac{\phi_m}{\phi_t} \left\{ \frac{V_c}{V_t} + \frac{V_u}{V_t} \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) + \frac{V_c}{V_t} \frac{\phi_c}{\phi_m} \frac{c-a}{\lambda_m} Q_z \right. \\ \left. + \frac{V_c}{V_t} \frac{a}{\lambda_m} \left[\frac{\phi_c}{\phi_m} \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) + \frac{\phi_u}{\phi_m} - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right] W_z \right. \\ \left. + \frac{V_u}{V_t} \frac{a}{\lambda_m} \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) \left(\frac{\phi_u}{\phi_m} - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) T_z \right\} \quad (P.1) \end{aligned}$$

Les indices u et c désignent respectivement le combustible et la cavité. De plus,

λ_i est le libre parcours de transport du milieu i de la cellule,

V_i le volume du même milieu,

V_t le volume total de la cellule,

ϕ_i la valeur moyenne du flux (de structure fine) d'ordre zéro dans le milieu i,

$\phi_t = \frac{V_m \phi_m + V_u \phi_u + V_c \phi_c}{V_t}$ la valeur moyenne du même flux dans toute la cellule,

⁽¹⁾ Nota : Cette formule a été établie en supposant le flux (de structure fine) d'ordre zéro isotrope et uniforme dans chacun des milieux de la cellule.

a et c les rayons respectifs du barreau et du canal

et

Q_z , W_z et T_z les probabilités fictives (réduites) de premier choc, relativement à la direction axiale ;

$$Q_z = P_{ccz} = \frac{\lambda_c}{c-a} P_{ccz}$$

$$W_z = P_{cuz} = \frac{\lambda_u}{a} P_{cuz}$$

$$T_z = P_{uuz} = \frac{\lambda_u}{a} P_{uuz}$$

Si l'on remplace, dans (V.B.3), $D_{//}$ par sa valeur tirée de (P.1) et D_m par $\frac{\lambda_m}{3}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma_{u_0}^{+(1)} = \frac{\lambda_m}{3} B_z^2 & \frac{V_u \phi_u + V_c \phi_c + \phi_m \left\{ V_c + V_u \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u}\right) + V_c \frac{\phi_c}{\phi_m} \frac{c-a}{\lambda_m} Q_z \right.}{S j^-} \\ & \left. + V_c \frac{a}{\lambda_m} \left[\frac{\phi_c}{\phi_m} \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u}\right) + \frac{\phi_u}{\phi_m} - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right] W_z + V_u \frac{a}{\lambda_m} \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u}\right) \left(\frac{\phi_u}{\phi_m} - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) T_z \right\} \end{aligned}$$

Compte tenu de l'égalité ⁽¹⁾ $\frac{\phi_u}{4j^-} = \mathcal{P}$ dans laquelle $\mathcal{P}$ représente,

en l'absence de fuites axiales, la probabilité pour un neutron né isotropiquement et uniformément dans le barreau d'en sortir, cette formule peut encore s'écrire :

⁽¹⁾ En effet, en appelant $\Gamma_{u_0}^{+(0)}$ la noirceur du canal en l'absence de fuites axiales, on a (cf. [10]) u_0 :

$$J_+(c) = (1 - \Gamma_{u_0}^{+(0)}) J_-(c)$$

L'intégration de la relation de conservation, dans le volume du canal, donne :

$$2 \pi c (J_+(c) - J_-(c)) + V_u \Sigma_{au} \phi_u = 0$$

On en tire :

suite page suivante.

$$\Gamma_{u_0}'^{+(1)} = \frac{2}{3\pi c} \lambda_m B_z^2 \mathcal{P} \left\{ V_u \left[1 + \frac{\phi_m}{\phi_u} \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) + \frac{a}{\lambda_m} \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \frac{\phi_m}{\phi_u} \right) T_z \right] \right. \\ \left. + V_c \left[\frac{\phi_m}{\phi_u} + \frac{\phi_c}{\phi_u} \left(1 + \frac{c-a}{\lambda_m} Q_z \right) + \frac{a}{\lambda_m} \left(\frac{\phi_c}{\phi_u} \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \right) + 1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_u} \frac{\phi_m}{\phi_u} \right) W_z \right] \right\} \quad (P.2)$$

Le calcul des flux moyens ϕ_c et ϕ_m pourra s'effectuer au moyen des relations⁽¹⁾ (cf. [10]) :

$$\frac{\phi_c}{\phi_u} = G' + a \sum_{au} \bar{N} \quad (P.3)$$

$$\frac{\phi_m}{\phi_u} = \frac{V_u \sum_{au}}{V_m \sum_{am}} \left(\frac{1}{f} - 1 \right) \quad (P.4)$$

où $\bar{N}$ est une fonction de $\alpha = \frac{a}{c}$ tabulée dans [12] (avec $\varphi_0 = \arcsin \alpha$)

$$N = \frac{1 - \frac{2}{\pi} \varphi_0 - \frac{1}{\pi} \sin 2 \varphi_0}{1 - \alpha^2}$$

suite du renvoi de la page précédente.

$$J_-(c) = \frac{V_u \sum_{au}}{2 \pi c \Gamma_{u_0}'^{+(o)}} \phi_u$$

On démontre à la page 5 de [10] que :

$$\Gamma_{u_0}'^{+(o)} = \frac{2 a^2 \sum_{au}}{c} \mathcal{P}$$

On a : $V_u = \pi a^2$ et par suite :

$$J_-(c) = \frac{\phi_u}{4 \mathcal{P}}$$

(1)

On rappelle que l'on applique implicitement la théorie ABH au niveau de tous les groupes et que $\Gamma_{u_0}'^{+(1)}$ représente la noirceur du canal vis-à-vis des neutrons venant du modérateur.

où
$$G' = \frac{1}{\mathcal{F}} - a \Sigma_{au} \quad (P.5)$$

et où
$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{\Sigma_{am} V_m}{\Sigma_{au} V_u} \frac{1}{\mathcal{F}} + K_m^2 b^2 c + \frac{\Sigma_{am} V_m}{\pi c} \left(\frac{3}{2} \lambda_N - 2 \right) \quad (P.6)$$

On désigne par b le rayon équivalent de cellule ($\pi b^2 = V_t$) et par λ_N la longueur d'extrapolation du canal noir de rayon c . On utilisera pour C l'expression (F.8) de l'annexe F.

2. Accroissement de la noirceur d'un canal situé en cellule ouverte

La formule (P.2) reste identique à elle-même quand b tend vers l'infini. Seule la valeur de $\frac{\phi_m}{\phi_u}$ change et devient compte tenu de (P.6) :

$$\frac{\phi_m}{\phi_u} = \frac{1}{\mathcal{F}} + \frac{K_m}{\Sigma_{am}} \frac{V_u \Sigma_{au}}{2\pi c} \frac{K_o(K_m c)}{K_1(K_m c)} + \frac{V_u \Sigma_{au}}{\pi c} \left(\frac{3}{2} \lambda_N - 2 \right) \quad (P.7)$$

L'accroissement de noirceur, dû aux fuites axiales, d'un canal situé en cellule ouverte est donc donné par la formule (P.2) où les valeurs de $\frac{\phi_c}{\phi_u}$ et $\frac{\phi_m}{\phi_u}$ sont respectivement tirées de (P.3) et (P.7).

ANNEXE Q

SIMULATION DANS LES CALCULS RIFIFI DES REFLECTEURS FODITH, HECTOR ET PODIPO

Principe : On veut faire passer des calculs RIFIFI⁽¹⁾, où le gain en réactivité dû à la présence du réflecteur, soit successivement estimé à la même valeur que dans les calculs FODITH, HECTOR et PODIPO.

Compte tenu des observations faites dans [11], il semble que le moyen le plus sûr d'y arriver est d'utiliser, pour ces calculs RIFIFI, le même rapport entre les coefficients de diffusion du coeur et du réflecteur et les mêmes propriétés de migration dans le réflecteur que celles qui sont implicitement utilisées pour les calculs FODITH, HECTOR et PODIPO.

Dans les données RIFIFI définissant le réflecteur, soient :

D1R et D1Z les coefficients de diffusion radial et axial dans le groupe rapide ; D2R et D2Z les coefficients de diffusion radial et axial dans le groupe thermique ; S.1 et S.2 les sections efficaces d'absorption dans le groupe rapide et le groupe thermique (1 est l'indice du groupe rapide et 2 celui du groupe thermique).

SIMULATION du réflecteur FODITH

Le coefficient de diffusion COREGRAF utilisé dans le coeur par RIFIFI s'obtient en corrigeant le coefficient de diffusion, calculé par la formule pratique de BENOIST, par un facteur égal à 3×0.3533 au niveau du groupe rapide et par un facteur égal à :

$$3 \times 0.3336 \sqrt{\frac{4}{\pi}} (1 - 3.10^{-5} (T - 27))$$

au niveau du groupe thermique (T est la température du modérateur exprimée en degrés Celsius). Ces corrections ont été introduites pour tenir compte :

(1) RIFIFI est un programme de résolution sur IBM 360/91 des équations de la diffusion en théorie à deux groupes d'énergie et une variable d'espace (cf. Note CEA-N-518 - Fév. 1965).

1 - du fait que la section efficace de diffusion du modérateur n'est pas rigoureusement constante lorsque l'énergie varie dans le domaine rapide.

2 - qu'on utilise le concept de section effective d'absorption dans le domaine thermique.

Il n'a pas été prévu de faire de telles corrections dans FODITH. Par suite, le coefficient de diffusion implicitement utilisé dans le coeur par ce code, peut être comparé au résultat de la formule pratique de BENOIST. Dans FODITH, on considère que le réflecteur est de même nature que le modérateur du coeur (avec son spectre). Cela revient à lui attribuer les propriétés suivantes ⁽¹⁾ :

a) dans le domaine rapide :

le coefficient de diffusion vaut: $\frac{1}{3 (\Sigma_{tm}^1 - \bar{\mu} \Sigma_{sm}^1)}$ dans toutes les directions

et la section efficace d'absorption et de transfert : $T_m(1 \rightarrow 2) = \frac{\xi \Sigma_{sm}^1}{\Delta U}$

où m est l'indice du modérateur du coeur

ΔU la largeur en léthargie du groupe rapide, données par COREGRAF,

ξ le gain moyen de léthargie par choc élastique. ;

b) dans le domaine thermique :

le coefficient de diffusion vaut: $\frac{1}{3 (\Sigma_{tm}^2 - \bar{\mu} \Sigma_{sm}^2)}$ dans toutes les directions

et la section efficace d'absorption: $\frac{\check{\Sigma}_{am}}{\bar{x}_m}$. Les symboles $\check{\Sigma}_{am}$ et $\bar{x}_m$ représentent

respectivement la section efficace effective d'absorption du modérateur et la vitesse moyenne réduite des neutrons dans ce milieu. (Ces deux quantités sont calculées par COREGRAF).

(1) Voir annexe R.

Pour simuler le réflecteur FODITH dans un calcul RIFIFI, on utilisera donc comme données "réflecteur" :

$$D1R = D1Z = \frac{0.3533}{\Sigma_{tm}^1 - \bar{\mu} \Sigma_{sm}^1}$$

$$D2R = D2Z = \frac{0.3336 \sqrt{\frac{4}{\pi}} (1 - 3 \cdot 10^{-5} (T - 27))}{\Sigma_{tm}^2 - \bar{\mu} \Sigma_{sm}^2}$$

$$S.1 = 3 \times 0.3533 \times T_m (1 + 2)$$

$$S.2 = 3 \times 0.3336 \sqrt{\frac{4}{\pi}} (1 - 3 \cdot 10^{-5} (T - 27)) \frac{\Sigma_{am}}{x_m}$$

SIMULATION du réflecteur HECTOR

Dans HECTOR, on considère que le réflecteur a les propriétés diffusantes du réseau de la zone périphérique du coeur mais les propriétés absorbantes du "modérateur sources-puits" (étendu au volume des canaux) de cette zone. La section efficace d'absorption d'un tel modérateur est égale :

- dans le groupe rapide, au rapport $\frac{D_R^1}{\tau_R}$ du coefficient de diffusion radial rapide et de l'âge (noté TAUR dans les sorties COREGRAF) ;
- dans le groupe thermique, à la section efficace d'absorption moyenne de la cellule multipliée par le facteur d'utilisation thermique du modérateur, des gaines et des centreurs (de la véritable cellule) :

$$\Sigma_{am_h}^2 = \bar{\Sigma}_{a_{cell}} (1 - f).$$

HECTOR utilise les données RIFIFI calculées par COREGRAF. En conséquence, pour simuler le réflecteur HECTOR dans un calcul RIFIFI, on prendra pour données "réflecteur" :

D1R = coefficient de diffusion radial rapide de la zone périphérique du cœur ;
 D1Z = " " axial " " "
 D2R = " " radial thermique " " "
 D2Z = " " axial " " "

$$S.1 = \frac{D1R}{\tau_R}$$

$$S.2 = \bar{\Sigma}_{a_{cell}} (1 - f)$$

(toutes les quantités au second membre de ces relations étant calculées par COREGRAF).

SIMULATION du réflecteur PODIPO

Dans PODIPO, le réflecteur a les propriétés diffusantes axiales du réseau de la zone périphérique du cœur mais les propriétés diffusantes radiales et les propriétés absorbantes du "modérateur source-puits" de cette zone. PODIPO utilise comme HECTOR, les résultats du calcul COREGRAF. En conséquence, pour simuler le réflecteur PODIPO dans un calcul RIFIFI, on prendra pour données "Réflecteur" :

$$D1R = \frac{0.3533}{SSM}$$

D1Z = coefficient de diffusion axial rapide de la zone périphérique du cœur

$$D2R = 0.3336 \sqrt{\frac{4}{\pi}} \frac{(1 - 3.10^{-5}(T - 27))}{SSM}$$

D2Z = coefficient de diffusion axial thermique de la zone périphérique du cœur

$$S.1 = \frac{D1R}{\tau_R}$$

$$S.2 = \bar{\Sigma}_{a_{cell}} (1 - f)$$

Le symbole Σ représente la valeur de la section efficace de diffusion du modérateur multipliée par $(1 - \bar{\mu})$ (sortie COREGRAF, cf. [29]).

ANNEXE R

ADAPTATION DES SORTIES DE COREGRAF AUX BESOINS DE FODITH, POUR LE CALCUL - EN THEORIE A DEUX GROUPES - DES REACTEURS NUCLEAIRES MODERES AU GRAPHITE

Une bonne approximation des sections efficaces multigroupes d'un élément combustible et du modérateur qui l'entoure peut être obtenue (cf. [8A]) par un calcul de cellule (bien qu'il soit difficile dans certains cas de définir la cellule correspondant à un élément⁽¹⁾). Lorsque ce calcul est exécuté par COREGRAF, un certain nombre d'opérations sont nécessaires pour déduire des sorties de ce code les entrées de FODITH, car COREGRAF a initialement été conçu pour alimenter les codes de diffusion.

Il est facile de voir qu'en théorie hétérogène, si l'on veut conserver f et p , il est préférable d'utiliser les sections efficaces moyennes plutôt que les sections efficaces effectives (en théorie homogène, ce choix n'a pratiquement aucune importance). A partir du moment où l'on est obligé de travailler en théorie multigroupe, on est amené à intégrer l'équation de BOLTZMANN en fonction de l'énergie dans le domaine d'énergie réservé à chaque groupe (afin de "conserver" les neutrons). Si l'on suppose le choc isotrope (pour simplifier), cela donne pour le groupe g correspondant au domaine d'énergie ΔE_g :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \cdot g \text{rad} \int_{\Delta E_g} v(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dE + \int_{\Delta E_g} \Sigma_t(\vec{r}, E) v(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dE \\ = \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta E_g} dE \int_0^\infty \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E) \phi(\vec{r}, E') dE' + \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta E_g} S(\vec{r}, E) dE \end{aligned}$$

(R.1)

⁽¹⁾ à la frontière du coeur et du réflecteur, par exemple.

On désigne par v et ϕ les flux angulaire et scalaire et par S la source formée par les neutrons ne provenant pas du ralentissement.

Soient : $v(E)$ la vitesse des neutrons ayant l'énergie E ;
 $n(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)$ la densité angulaire des neutrons ;
 $N(\vec{r}, E)$ la densité scalaire des neutrons.

On a :

$$v(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) = v(E) n(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)$$

$$\phi(\vec{r}, E) = v(E) N(\vec{r}, E)$$

On pose :

$$f^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_{\Delta E_g} v(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dE$$

$$d^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_{\Delta E_g} n(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dE$$

$$\bar{v}^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\int_{\Delta E_g} v(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dE}{\int_{\Delta E_g} n(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dE}$$

$$F^g(\vec{r}) = \int_{\Delta E_g} \phi(\vec{r}, E) dE$$

$$D^g(\vec{r}) = \int_{\Delta E_g} N(\vec{r}, E) dE$$

$$Z^g(\vec{r}) = \int_{\Delta E_g} S(\vec{r}, E) dE$$

$$\bar{\Sigma}_t^g(r) = \frac{\int_{\Delta E_g} \Sigma_t(\vec{r}, E) v(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dE}{\int_{\Delta E_g} v(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dE} \quad (R.2)$$

$$\Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow g) = \int_{\Delta E_g} \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E) dE$$

$$\bar{\Sigma}_s^{g' \rightarrow g}(\vec{r}) = \frac{\int_{\Delta E_{g'}} dE' \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow g) \phi(\vec{r}, E')}{\int_{\Delta E_{g'}} dE' \phi(\vec{r}, E')} \quad (R.3)$$

$$\check{\Sigma}_t^g(\vec{r}) = \frac{\int_{\Delta E_g} \Sigma_t(\vec{r}, E) v(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dE}{v_{og} \int_{\Delta E_g} n(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dE} \quad (R.4)$$

$$\check{\Sigma}_s^{g' \rightarrow g}(\vec{r}) = \frac{\int_{\Delta E_{g'}} dE' \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow g) \phi(\vec{r}, E')}{v_{og} \int_{\Delta E_{g'}} dE' N(\vec{r}, E')} \quad (R.5)$$

où v_{og} représente une vitesse de référence arbitrairement choisie dans le domaine des vitesses recouvert par le groupe g .

Les signes $-$ et $\checkmark$ placés au-dessus du symbole d'une section efficace indiquent s'il s'agit d'une section efficace moyenne ou d'une section efficace effective.

La relation (R.1) peut s'écrire, en supposant que $\bar{\Sigma}_t$ et $\bar{\Sigma}_t^v$ sont indépendants de $\vec{\Omega}$, soit :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} \text{grad } f^g + \bar{\Sigma}_t^g f^g = \frac{1}{4\pi} \sum_{g'} \bar{\Sigma}_s^{g' \rightarrow g} F^{g'} + \frac{Z^g}{4\pi} \quad (\text{R.6})$$

soit :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} \text{grad } \bar{v}_g d^g + \bar{\Sigma}_t^g v_{og} d^g = \frac{1}{4\pi} \sum_{g'} \bar{\Sigma}_s^{g' \rightarrow g} v_{og'} D^{g'} + \frac{Z^g}{4\pi} \quad (\text{R.7})$$

La première équation (R.6) utilise les sections efficaces moyennes, la seconde équation (R.7) les sections efficaces effectives. La première équation est une équation du transport, mais la seconde n'est pas une⁽¹⁾, car $\bar{v}_g$ dépend de l'espace, sauf si le milieu est homogène et infini. Comme la théorie hétérogène constitue une approche de la résolution de l'équation du transport dans chacun des groupes, il paraît indiqué, à moins d'admettre que $\bar{v}_g$ est indépendant de $\vec{r}$, d'utiliser dans FODITH les sections efficaces moyennes plutôt que les sections efficaces effectives.

L'exploitation directe des sorties de COREGRAF permet d'atteindre les valeurs appropriées des sections efficaces de diffusion. En effet, en SSM et en US on trouve les valeurs moyennes des sections efficaces thermiques de diffusion du modérateur et du combustible, multipliées par $1 - \bar{\mu}$, où $\bar{\mu}$ désigne le cosinus moyen de l'angle de diffusion. Le modérateur, étant composé de graphite, a un $\bar{\mu}$ de : $\frac{2}{3 \times 12} = 0.0555555$. Le $\bar{\mu}$ du combustible est évidemment nul.

Les sections efficaces moyennes de diffusion du groupe rapide, indicé 1, se déduisent de celles du groupe thermique, indicé 2.

⁽¹⁾ Nota. Si l'on avait intégré en fonction de l'énergie, l'équation de BOLTZMANN de la densité et non celle du flux, il n'aurait pas été possible de faire apparaître les sections efficaces effectives (voir (R.4) et (R.5)).

Le noyau de l'opérateur de ralentissement (élastique) dans le modérateur a pour expression, lorsqu'on utilise la variable léthargie :

$$\Sigma_{sm} p(u \rightarrow u')$$

dans laquelle Σ_{sm} est une constante sensiblement égale à la section efficace moyenne de diffusion du groupe thermique Σ_{sm}^2 et $p(u \rightarrow u')$ une fonction ne dépendant que de la différence $u - u'$ ($p(u \rightarrow u')$ est nulle lorsque $u' < u$).

La capture du modérateur dans le domaine rapide est négligeable.

Compte tenu de ces propriétés, il est facile de montrer que l'équation du transport du modérateur dans le groupe rapide s'écrit, à condition de négliger les transitoires de PLACZEK :

$$\vec{\Omega} \cdot \text{grad } f^1 + \Sigma_{sm} f^1 = \frac{1}{4\pi} \left(\Sigma_{sm} - \frac{\xi \Sigma_{sm}}{\Delta U} \right) F^1 \quad (R.8)$$

où ξ représente le gain moyen de léthargie par choc élastique et ΔU la largeur du groupe rapide exprimée en léthargie.

Le ξ du graphite vaut 0.158. Pour évaluer ΔU on utilise la formule, où n'interviennent que des sorties de COREGRAF :

$$\Delta U = QD (NO + DN2) - DN2 - \ln \frac{5.26311}{1.44}$$

avec

$$NO + DN2 = \ln \frac{E_{io}}{E_c}$$

$$DN2 = \ln \frac{1.44 \text{ eV}}{E_c}$$

On désigne par E_{i0} l'énergie initiale moyenne des neutrons rapides (déduite des mesures de l'âge) et par E_c l'énergie de coupure entre le domaine de ralentissement et le domaine de thermalisation (calculée par COREGRAF, conformément aux indications de NAUDET [40]). Le facteur correctif QD a été introduit pour tenir compte des chocs inélastiques dans le combustible au-dessus de 50 keV. Le nombre décimal 5.26311 représente en électron-volts l'énergie de coupure entre le domaine rapide et le domaine thermique que nous avons été amené à choisir pour les calculs FODITH. Les raisons de ce choix apparaîtront clairement dans la suite de l'exposé.

L'examen de (R.8) montre qu'au niveau du groupe rapide il faut attribuer respectivement les valeurs Σ_{sm}^1 et $\Sigma_{sm}^2 - \frac{\xi \Sigma_{sm}^2}{\Delta U}$ à la section efficace moyenne totale et à la section efficace moyenne de diffusion du modérateur.

Cela donne, compte tenu de ce qui précède :

$$\Sigma_{tm}^1 = \Sigma_{sm}^2 \quad (R.9)$$

$$\Sigma_{sm}^1 = \Sigma_{sm}^2 - \frac{\xi \Sigma_{sm}^2}{\Delta U} \quad (R.10)$$

L'équation (R.8) repose en partie sur le fait que la section de transfert du groupe rapide au groupe thermique dans le modérateur doit prendre la valeur $\frac{\xi \Sigma_{sm}^2}{\Delta U}$.

On peut donc écrire :

$$T_m(1 \rightarrow 2) = \frac{\xi \Sigma_{sm}^2}{\Delta U} \quad (R.11)$$

Conformément aux conventions adoptées dans COREGRAF (cf. [29]), on égalera la section efficace moyenne de diffusion du combustible dans le groupe rapide à celle qui a été adoptée dans le groupe thermique :

$$\Sigma_{su}^1 = \Sigma_{su}^2 \quad (R.12)$$

Les valeurs moyennes des sections efficaces d'absorption du combustible (dans les deux groupes) et du modérateur (dans le groupe thermique) ne figurent pas dans les sorties COREGRAF. En effet, ce code ne fournit que les sections efficaces effectives d'absorption dans le groupe thermique et ne donne aucune valeur pour la section efficace d'absorption rapide du combustible.

Si n représente la densité du flux, il est facile de voir, compte tenu de (R.2), (R.3), (R.4) et de (R.5), que dans le domaine thermique :

$$\bar{\Sigma}_a^2 = \frac{\Sigma_a^2}{\bar{x}} \sqrt{\frac{T_o}{T}} \quad (R.13)$$

On a posé :

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{x_c} x n(x) dx}{\int_0^{x_c} n(x) dx} \quad (\text{vitesse réduite moyenne})$$

$$T_o = \frac{1}{2} \frac{m v_o^2}{k}$$

avec
$$x = \frac{v}{\sqrt{\frac{2 k T}{m}}}$$

On désigne par x_c la vitesse réduite correspondant à l'énergie de coupure, par T la température absolue du milieu dans lequel on se place, par k la constante de BOLTZMANN et par m la masse du neutron.

La température absolue de "référence" T_0 est automatiquement choisie égale à 293.6 °K par COREGRAF. La température absolue T de chaque milieu (combustible et modérateur) est fixée par l'utilisateur.

La vitesse réduite moyenne dans le modérateur *correspondant à l'énergie de coupure 5.26311* peut s'obtenir en combinant certaines des sorties COREGRAF, selon la formule :

$$\bar{x}_m = \frac{Y22 - DA5}{Y21 - DA4} \frac{D_\infty}{\bar{D}} \quad (R.14)$$

avec

$$\frac{D_\infty}{\bar{D}} = \frac{0.3533}{0.3336 (1 - 3.10^{-5} (T - 300))}$$

La section efficace effective d'absorption thermique du modérateur est donnée en SAM. En divisant SAM par $\bar{x}_m$, on trouve d'après (R.13) la valeur moyenne de la section efficace d'absorption thermique du modérateur (nous choisirons pour T la valeur T_0).

Si le combustible était nu, on pourrait faire faire à COREGRAF le calcul de la vitesse réduite moyenne du barreau $\bar{x}_u$ en ajoutant une boucle au calcul FORTRAN du spectre thermique. Mais en général, le barreau comprend, outre le combustible, des gaines, des bouchons et des centreurs. Comme on s'est volontairement limité dans l'élaboration du code FODITH à la prise en compte de deux milieux concentriques par canal, un barreau plein et une cavité circulaire, on est amené à homogénéiser le barreau. La formule (R.13) ne nous est alors d'aucune utilité.

Soient $\bar{\Sigma}_{au_h}^2$ la section efficace moyenne d'absorption thermique du barreau homogénéisé et f l'expression, obtenue en (F.5) dans l'annexe F, du facteur d'utilisation thermique du barreau en fonction des paramètres hétérogènes. On doit avoir :

$$f(\bar{\Sigma}_{au_h}^2) = 1 - \text{FRM} \quad (\text{R.15})$$

où FRM représente dans les sorties COREGRAF le facteur d'utilisation thermique du modérateur. On a construit un petit sous-programme SAUTER qui, connaissant FRM, Σ_{sm}^2 , Σ_{su}^2 , Σ_{am}^2 et $\bar{\mu}_m$, résout l'équation (R.15) par approximations successives et donne $\bar{\Sigma}_{au_h}^2$.

La section efficace moyenne d'absorption du barreau $\bar{\Sigma}_{au_h}^1$ dans le groupe rapide peut être ajustée sur la valeur, calculée par COREGRAF, du facteur antitrappe p . Celui-ci est en effet égal à la probabilité $P_{um_0}^*$, dans le groupe rapide, pour un neutron né isotropiquement et uniformément dans le barreau de disparaître dans le modérateur par suite du ralentissement :

$$p = P_{um_0}^*$$

Par réciprocité, on peut écrire :

$$P_{um_0}^* = \frac{T_m(1 \rightarrow 2) V_m}{\bar{\Sigma}_{au_h}^1 V_u} P_{mu_0}^* \quad (\text{R.16})$$

où $P_{mu_0}^*$ est la probabilité, dans le groupe rapide, pour un neutron né isotropiquement et uniformément dans le modérateur, d'être capturé dans le barreau. Cette probabilité peut être représentée, dans le cadre⁽¹⁾ du formalisme de FODITH, par l'expression (F.5) du facteur d'utilisation thermique du barreau, dans laquelle on a remplacé Σ_{am}^2 par $T_m(1 \rightarrow 2)$, $\bar{\Sigma}_{au_h}^2$ par $\bar{\Sigma}_{au_h}^1$ et Σ_{sm}^2 par $\Sigma_{sm}^2 - T_m(1 \rightarrow 2)$. De (R.16), on déduit l'équation implicite :

$$\frac{T_m(1 \rightarrow 2) V_m}{\bar{\Sigma}_{au_h}^1 V_u} f(\bar{\Sigma}_{au_h}^1) = p$$

(1) Voir renvoi (1) de la page 3 de l'annexe P.

Cette équation est résolue dans le sous-programme SAURAP.

Compte tenu de l'annexe F, il est évident que si l'on alimente FODITH conformément aux stipulations précédentes et que l'on applique ce code au calcul du facteur d'utilisation thermique et du facteur antitrappe d'un réseau infini périodique, on obtiendra respectivement $1 - \text{FRM}$ et p . Il reste à écrire la formule qui permettra de déduire des sorties de COREGRAF la valeur de $(\nu \Sigma_f)_{\text{thermique}}$.

On prendra :

$$(\nu \Sigma_f)_{\text{thermique}} = \eta \epsilon \frac{f}{1 - \text{FRM}} \overline{\Sigma_{\text{auh}}^2} \quad (\text{R.17})$$

On est ainsi assuré de respecter le k_{∞} calculé⁽¹⁾ par COREGRAF.

(1) En toute rigueur, il faut tenir compte du fait que dans FODITH on traite le ralentissement dans le modérateur par la théorie de diffusion asymptotique et non par la théorie de l'âge (comme dans COREGRAF). Il s'ensuit que la source formée par les neutrons ralentis au niveau du groupe thermique est relativement éloignée de l'uniformité dans le modérateur. Cela nous conduit à diviser le second membre de (R.17) par un facteur T très légèrement supérieur à un (T est d'autant plus grand que le volume des canaux est plus petit).

ANNEXE S

APPLICATION DE LA NOUVELLE FORMULATION HETEROGENE AU CALCUL DE L'AIRES DE MIGRATION RADIALE D'UN RESEAU INFINI PERIODIQUE CARRE

Les notations et les conventions adoptées⁽¹⁾ sont celles du chapitre III.

On considère un réseau infini constitué par la répétition périodique d'un seul type de canal. On se propose de chercher à quelle condition le flux dans un tel réseau peut être de la forme $e^{i\vec{B} \cdot \vec{r}} \psi$ où ψ est une fonction périodique de même période que le réseau et $\vec{B}$ un vecteur fixé.

Admettons que cette condition soit réalisée. Il est évident qu'au niveau du groupe g , le taux d'absorption et le gradient moyen du flux dans le barreau inclus dans le canal k ont respectivement pour intensité : $\sigma_g e^{i\vec{B} \cdot \vec{r}_k}$ et $\vec{\nabla} \sigma_g e^{i\vec{B} \cdot \vec{r}_k}$, en convenant de supprimer l'indice k pour désigner une grandeur commune à tous les canaux. Compte tenu de (III.D.1.6) et (III.D.1.26), on a également :

$$\sigma_{k0}^g = \sigma_0^g e^{i\vec{B} \cdot \vec{r}_k}$$

et

$$\vec{\nabla} \sigma_{k1}^g = \vec{\nabla} \sigma_1^g e^{i\vec{B} \cdot \vec{r}_k}$$

En raisonnant de groupe en groupe, en partant du groupe rapide et en s'aidant des relations (III.B.12), (III.A.48), (III.D.1.13), (III.D.1.1) et (III.A.46A), on montre que :

⁽¹⁾ En particulier, la hauteur est supposée infinie.

$$N_k(g, g) = N(g, g) e^{i\vec{B} \cdot \vec{r}_k} \quad (S.1)$$

$$\psi_{ok}^{g, g}(\vec{r}_k) = \psi_o^{g, g} e^{i\vec{B} \cdot \vec{r}_k} \quad (S.2)$$

De la même manière, en s'aidant des relations (III.A.51), (III.D.1.32), (III.D.1.2) et (III.A.47A), on montre que :

$$\vec{V}_k(g, g) = \vec{V}(g, g) e^{i\vec{B} \cdot \vec{r}_k} \quad (S.3)$$

$$\vec{\nabla} \psi_{ok}^{g, g}(\vec{r}_k) = \vec{\nabla} \psi_o^{g, g} e^{i\vec{B} \cdot \vec{r}_k} \quad (S.4)$$

Portons ces valeurs dans les relations caractéristiques (III.D.1.20) et (III.D.1.38) et dans les relations géométriques (III.D.2.1) et (III.D.2.2). On obtient (voir la convention adoptée à la fin du chapitre I) :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq g' \leq g} \left(a_o(g' \rightarrow g) \psi_o^{g', g'} + c_o(g' \rightarrow g) N(g', g') \right) \\ + \frac{1}{k_{eff}} \chi^g \sum_{1 \leq g' \leq NG} \left(b^o(g' \rightarrow g) \psi_o^{g', g'} + d^o(g' \rightarrow g) N(g', g') \right) = 0 \end{aligned} \quad (S.5)$$

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq g' \leq g} \left(a^1(g' \rightarrow g) \vec{\nabla} \psi_o^{g', g'} + c^1(g' \rightarrow g) \vec{V}(g', g') \right) \\ + \frac{1}{k_{eff}} \chi^g \sum_{1 \leq g' \leq NG} \left(b^1(g' \rightarrow g) \vec{\nabla} \psi_o^{g', g'} + d^1(g' \rightarrow g) \vec{V}(g', g') \right) = 0 \end{aligned} \quad (S.6)$$

$$\psi_0^g, g = N(g, g) S_0^g(\vec{B}) + \vec{V}(g, g) \cdot \vec{S}_1^g(\vec{B}) \quad (S.7)$$

$$\vec{\nabla} \psi_0^g, g = - N(g, g) K_m^g S_1^g(\vec{B}) + \vec{V}(g, g) S_2^g(\vec{B}) - V_x(g, g) \vec{S}_x^g(\vec{B}) - V_y(g, g) \vec{S}_y^g(\vec{B}) \quad (S.8)$$

où V_x et V_y sont les composantes x et y de $\vec{V}$ dans un système d'axes rectangulaires Oxy situé dans un plan de section droite du réseau.

On a posé :

$$S_0^g(\vec{B}) = \sum_{j \neq k} e^{-i\vec{B} \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j)} K_0(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \quad (S.9)$$

$$\vec{S}_1^g(\vec{B}) = \sum_{j \neq k} \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} e^{-i\vec{B} \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j)} K_1(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \quad (S.10)$$

$$S_2^g(\vec{B}) = \sum_{j \neq k} e^{-i\vec{B} \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j)} \frac{K_1(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \quad (S.11)$$

On appelle $\vec{S}_x^g(\vec{B})$ et $\vec{S}_y^g(\vec{B})$ les vecteurs qui dans le système Oxy ont respectivement pour composantes x :

$$S_{x^2}^g(\vec{B}) \quad \text{et} \quad S_{xy}^g(\vec{B}) ,$$

pour composantes y :

$$S_{xy}^g(\vec{B}) \quad \text{et} \quad S_{y^2}^g(\vec{B})$$

avec :

$$S_{x^2}^g(\vec{B}) = K_m^g \sum_{j \neq k} \frac{(x_k - x_j)^2}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^2} e^{-i\vec{B} \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j)} K_2(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \quad (S.12)$$

$$S_{xy}^g(\vec{B}) = K_m^g \sum_{j \neq k} \frac{(x_k - x_j)(y_k - y_j)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^2} e^{-i\vec{B} \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j)} K_2(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \quad (S.13)$$

$$S_{y^2}^g(\vec{B}) = K_m^g \sum_{j \neq k} \frac{(y_k - y_j)^2}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^2} e^{-i\vec{B} \cdot (\vec{r}_k - \vec{r}_j)} K_2(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \quad (S.14)$$

Compte tenu des propriétés des fonctions de BESSEL modifiées de seconde espèce, ces séries convergent. Leurs sommes sont par ailleurs indépendantes du choix du centre du canal par rapport auquel leurs éléments se référencient, car le réseau est infini périodique.

Imaginons pour simplifier que la cellule du réseau soit carrée et que ses côtés soient parallèles aux axes Ox et Oy précédemment choisis. L'aire de migration radiale est égale à l'aire de migration suivant un de ces axes. Or il suffit que la composante x de $\vec{B}$ ne soit pas nulle pour que dans l'expression de k_{eff} apparaisse l'aire de migration suivant Ox (cf. [11]).

Nous supposons donc :

$$B_y = 0$$

Dans ces conditions il est facile de voir, en remplaçant $\vec{B}$ par $B_x \vec{w}$ dans les sommes (S.9) à (S.14), que (S.7) et (S.8) deviennent⁽¹⁾⁽²⁾ :

$$\psi_0^{g,g} = N(g,g) S_0^g(B_x) + V_x(g,g) S_{1x}^g(B_x) \quad (S.15)$$

(1) Il faut faire appel à la linéarité de (S.6).

(2) On désigne par $\vec{w}$ le vecteur unitaire porté par Ox.

$$\left. \begin{aligned} \nabla \psi_{ox}^{g,g} &= -N(g,g) K_m^g S_{1x}^g(B_x) + V_x(g,g) (S_2^g(B_x) - S_{x^2}^g(B_x)) \\ \nabla \psi_{oy}^{g,g} &= V_y(g,g) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (S.16)$$

On a posé : $S_0^g(B_x) = S_0^g(B_x \vec{W})$, $\vec{S}_1^g(B_x) = \vec{S}_1^g(B_x \vec{W})$, $S_2^g(B_x) = S_2^g(B_x \vec{W})$, etc.

→ On désigne par S_{1x}^g la composante x de S_1^g et par $\nabla \psi_{ox}^{g,g}$ celle de $\nabla \psi_0^{g,g}$.

En effet, on a :

$$S_{xy}^g(B_x) = 0$$

On se limite à la théorie à deux groupes, les équations (S.5) et (S.6) s'écrivent :

a) dans le groupe rapide :

$$\begin{aligned} A_{1,1}^0 N(1,1) + C_{1,1}^0 V_x(1,1) \\ + \frac{1}{k_{eff}} \left(B_{1,1}^0 N(1,1) + D_{1,1}^0 V_x(1,1) + B_{2,1}^0 N(2,2) + D_{2,1}^0 V_x(2,2) \right) = 0 \end{aligned} \quad (S.17)$$

$$\begin{aligned} A_{1,1}^1 V_x(1,1) + C_{1,1}^1 N(1,1) \\ + \frac{1}{k_{eff}} \left(B_{1,1}^1 V_x(1,1) + D_{1,1}^1 N(1,1) + B_{2,1}^1 V_x(2,2) + D_{2,1}^1 N(2,2) \right) = 0 \end{aligned} \quad (S.18)$$

b) dans le groupe thermique :

$$A_{1,2}^0 N(1,1) + C_{1,2}^0 V_x(1,1) + A_{2,2}^0 N(2,2) + C_{2,2}^0 V_x(2,2) = 0 \quad (S.19)$$

$$A_{1,2}^1 V_x(1,1) + C_{1,2}^1 N(1,1) + A_{2,2}^1 V_x(2,2) + C_{2,2}^1 N(2,2) = 0 \quad (S.20)$$

On a remplacé $\psi_0^{g,g}$ et $\nabla\psi_{ox}^{g,g}$ par leurs valeurs tirées de (S.15) et (S.16) et on a posé :

$$A_{g',g}^0 = a^0(g' \rightarrow g) S_0^{g'}(B_x) + c^0(g' \rightarrow g) \quad (S.21)$$

$$C_{g',g}^0 = a^0(g' \rightarrow g) S_{1x}^{g'}(B_x) \quad (S.22)$$

$$B_{g',g}^0 = b^0(g' \rightarrow g) S_0^{g'}(B_x) + d^0(g' \rightarrow g) \quad (S.23)$$

$$D_{g',g}^0 = b^0(g' \rightarrow g) S_{1x}^{g'}(B_x) \quad (S.24)$$

$$A_{g',g}^1 = a^1(g' \rightarrow g) (S_2^{g'}(B_x) - S_{x^2}^{g'}(B_x)) + c^1(g' \rightarrow g) \quad (S.25)$$

$$C_{g',g}^1 = -a^1(g' \rightarrow g) K_m^{g'} S_{1x}^{g'}(B_x) \quad (S.26)$$

$$B_{g',g}^1 = b^1(g' \rightarrow g) (S_2^{g'}(B_x) - S_{x^2}^{g'}(B_x)) + d^1(g' \rightarrow g) \quad (S.27)$$

$$D_{g',g}^1 = -b^1(g' \rightarrow g) K_m^{g'} S_{1x}^{g'}(B_x) \quad (S.28)$$

De (S.19) et (S.20), on tire :

$$N(2,2) = - \frac{(A_{1,2}^0 A_{2,2}^1 - C_{1,2}^1 C_{2,2}^0) N(1,1) + (C_{1,2}^0 A_{2,2}^1 - C_{2,2}^0 A_{1,2}^1) V_x(1,1)}{A_{2,2}^0 A_{2,2}^1 - C_{2,2}^0 C_{2,2}^1}$$

(S.29)

$$V_x(2,2) = \frac{(A_{1,2}^0 C_{2,2}^1 - C_{1,2}^1 A_{2,2}^0) N(1,1) + (C_{1,2}^0 C_{2,2}^1 - A_{2,2}^0 A_{1,2}^1) V_x(1,1)}{A_{2,2}^0 A_{2,2}^1 - C_{2,2}^0 C_{2,2}^1}$$

(S.30)

Portons ces expressions dans (S.17) et (S.18). On obtient :

$$A_{1,1}^0 N(1,1) + C_{1,1}^0 V_x(1,1) + \frac{1}{k_{\text{eff}}} \left(\hat{B}_{1,1}^0 N(1,1) + \hat{D}_{1,1}^0 V_x(1,1) \right) = 0$$

(S.31)

$$A_{1,1}^1 V_x(1,1) + C_{1,1}^1 N(1,1) + \frac{1}{k_{\text{eff}}} \left(\hat{B}_{1,1}^1 V_x(1,1) + \hat{D}_{1,1}^1 N(1,1) \right) = 0$$

(S.32)

avec :

$$\hat{B}_{1,1}^\epsilon = B_{1,1}^\epsilon - B_{2,1}^\epsilon \frac{A_{1,2}^\epsilon A_{2,2}^{\epsilon'} - C_{1,2}^{\epsilon'} C_{2,2}^\epsilon}{A_{2,2}^0 A_{2,2}^1 - C_{2,2}^0 C_{2,2}^1} + D_{2,1}^\epsilon \frac{A_{1,2}^\epsilon C_{2,2}^{\epsilon'} - C_{1,2}^{\epsilon'} A_{2,2}^\epsilon}{A_{2,2}^0 A_{2,2}^1 - C_{2,2}^0 C_{2,2}^1}$$

(S.33)

$$\hat{D}_{1,1}^\epsilon = D_{1,1}^\epsilon - B_{2,1}^\epsilon \frac{C_{1,2}^\epsilon A_{2,2}^{\epsilon'} - C_{2,2}^\epsilon A_{1,2}^{\epsilon'}}{A_{2,2}^0 A_{2,2}^1 - C_{2,2}^0 C_{2,2}^1} - D_{2,1}^\epsilon \frac{A_{2,2}^\epsilon A_{1,2}^{\epsilon'} - C_{1,2}^\epsilon C_{2,2}^{\epsilon'}}{A_{2,2}^0 A_{2,2}^1 - C_{2,2}^0 C_{2,2}^1}$$

(S.34)

l'indice ϵ' prenant la valeur 0 si $\epsilon = 1$
et la valeur 1 si $\epsilon = 0$.

Pour que le système {(S.31), (S.32)} à deux inconnues $N(1,1)$ et $V_x(1,1)$ ait une solution non nulle, il faut et il suffit que son déterminant soit nul. C'est la condition que nous cherchons depuis le début. Elle s'écrit :

$$(A_{1,1}^0 + \frac{1}{k_{\text{eff}}} \hat{B}_{1,1}^0)(A_{1,1}^1 + \frac{1}{k_{\text{eff}}} \hat{B}_{1,1}^1) - (C_{1,1}^0 + \frac{1}{k_{\text{eff}}} \hat{D}_{1,1}^0)(C_{1,1}^1 + \frac{1}{k_{\text{eff}}} \hat{D}_{1,1}^1) = 0$$

soit, en ordonnant les puissances de $\frac{1}{k_{\text{eff}}}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_{\text{eff}}^2} (\hat{B}_{1,1}^0 \hat{B}_{1,1}^1 - \hat{D}_{1,1}^0 \hat{D}_{1,1}^1) + \frac{1}{k_{\text{eff}}} (A_{1,1}^0 \hat{B}_{1,1}^1 + \hat{B}_{1,1}^0 A_{1,1}^1 - C_{1,1}^0 \hat{D}_{1,1}^1 - \hat{D}_{1,1}^0 C_{1,1}^1) \\ + A_{1,1}^0 A_{1,1}^1 - C_{1,1}^0 C_{1,1}^1 = 0 \quad (\text{S.35}) \end{aligned}$$

Il s'agit évidemment de l'équation critique du réseau.

Si l'on développe $e^{-iB_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)}$ en puissances de $B_{\mathbf{x}}$ dans (S.9), (S.10), (S.11) et (S.12), on obtient compte tenu de la périodicité du réseau :

$$S_{\mathbf{0}}^g(B_{\mathbf{x}}) = S_{\mathbf{0}}^g - B_{\mathbf{x}}^2 S_{\mathbf{0}\mathbf{x}^2}^g + O(B_{\mathbf{x}}^4)$$

$$S_{1\mathbf{x}}^g(B_{\mathbf{x}}) = -2 \frac{1}{B_{\mathbf{x}}} S_{2\mathbf{x}^2}^g + O(B_{\mathbf{x}}^3)$$

$$S_{2\mathbf{x}}^g(B_{\mathbf{x}}) = S_{2\mathbf{x}}^g - B_{\mathbf{x}}^2 S_{2\mathbf{x}^2}^g + O(B_{\mathbf{x}}^4)$$

$$S_{\mathbf{x}^2}^g(B_{\mathbf{x}}) = S_{\mathbf{x}^2}^g - B_{\mathbf{x}}^2 S_{\mathbf{x}^4}^g + O(B_{\mathbf{x}}^4)$$

avec :

$$S_{\mathbf{0}}^g = \sum_{j \neq k} K_{\mathbf{0}}(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \quad (\text{S.36})$$

$$S_{\mathbf{0}\mathbf{x}^2}^g = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)^2 K_{\mathbf{0}}(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)$$

$$S_{2\mathbf{x}^2}^g = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \frac{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)^2}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} K_1(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)$$

$$S_2^g = \sum_{j \neq k} \frac{K_1(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|}$$

$$S_{x^2}^g = K_m^g \sum_{j \neq k} \frac{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)^2}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^2} K_2(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)$$

$$S_x^g = \frac{K_m^g}{2} \sum_{j \neq k} \frac{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)^4}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^4} K_2(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)$$

Le réseau étant carré, il est clair que :

$$S_{ox^2}^g = \frac{1}{4} \sum_{j \neq k} K_0(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) (\vec{r}_k - \vec{r}_j)^2 \quad (S.37)$$

$$S_{2x^2}^g = \frac{1}{4} \sum_{j \neq k} K_1(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|) |\vec{r}_k - \vec{r}_j| \quad (S.38)$$

$$S_x^g = \frac{K_m^g}{2} \sum_{j \neq k} K_2(K_m^g |\vec{r}_k - \vec{r}_j|)$$

En utilisant la relation : $K_{n+1}(x) - K_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} K_n(x)$, on voit que :

$$S_{x^2}^g - \frac{K_m^g}{2} S_0^g = S_2^g$$

On en déduit l'égalité :

$$S_2^g(B_x) - S_{x^2}^g(B_x) = -\frac{K_m^g}{2} S_0^g - B_x^2 (S_{2x^2}^g - S_{x^4}^g) + O(B_x^4)$$

Portons ces résultats dans (S.21 à 28). Il vient :

$$A_{g',g}^0 = a^0(g' \rightarrow g) S_0^{g'} + c^0(g' \rightarrow g) - a^0(g' \rightarrow g) S_{ox^2}^{g'} B_x^2 + O(B_x^4) \quad (S.39)$$

$$A_{g',g}^1 = -a^1(g' \rightarrow g) \frac{K_m^{g'}}{2} S_0^{g'} + c^1(g' \rightarrow g) - a^1(g' \rightarrow g) (S_{2x^2}^{g'} - S_{x^4}^{g'}) B_x^2 + O(B_x^4) \quad (S.40)$$

$$B_{g',g}^0 = b^0(g' \rightarrow g) S_0^{g'} + d^0(g' \rightarrow g) - b^0(g' \rightarrow g) S_{ox^2}^{g'} B_x^2 + O(B_x^4) \quad (S.41)$$

$$B_{g',g}^1 = -b^1(g' \rightarrow g) \frac{K_m^{g'}}{2} S_0^{g'} + d^1(g' \rightarrow g) - b^1(g' \rightarrow g) (S_{2x^2}^{g'} - S_{x^4}^{g'}) B_x^2 + O(B_x^4) \quad (S.42)$$

$$C_{g',g}^0 = -2i a^0(g' \rightarrow g) S_{2x^2}^{g'} B_x + O(B_x^3) \quad (S.43)$$

$$C_{g',g}^1 = 2i a^1(g' \rightarrow g) K_m^{g'} S_{2x^2}^{g'} B_x + O(B_x^3) \quad (S.44)$$

$$D_{g',g}^0 = -2i b^0(g' \rightarrow g) S_{2x^2}^{g'} B_x + O(B_x^3) \quad (S.45)$$

$$D_{g',g}^1 = 2i b^1(g' \rightarrow g) K_m^{g'} S_{2x^2}^{g'} B_x + O(B_x^3) \quad (S.46)$$

Si l'on se reporte aux formules (S.33) et (S.34), on s'aperçoit que l'on peut écrire les coefficients de l'équation du second degré (S.35) sous la forme :

$$\hat{B}_{1,1}^0 \hat{B}_{1,1}^1 - \hat{D}_{1,1}^0 \hat{D}_{1,1}^1 = \alpha_0 + \alpha_2 B_x^2 + O(B_x^4)$$

$$A_{1,1}^0 \hat{B}_{1,1}^1 + \hat{B}_{1,1}^0 A_{1,1}^1 - C_{1,1}^0 \hat{D}_{1,1}^1 - \hat{D}_{1,1}^0 C_{1,1}^1 = \beta_0 + \beta_2 B_x^2 + O(B_x^4)$$

$$A_{1,1}^0 A_{1,1}^1 - C_{1,1}^0 C_{1,1}^1 = \gamma_0 + \gamma_2 B_x^2 + O(B_x^4)$$

avec

$$\alpha_0 = \hat{B}_{1,1}^0(o) \times \hat{B}_{1,1}^1(o) \quad (S.47)$$

$$\beta_0 = A_{1,1}^0(o) \times \hat{B}_{1,1}^1(o) + \hat{B}_{1,1}^0(o) \times A_{1,1}^1(o) \quad (S.48)$$

$$\gamma_0 = A_{1,1}^0(o) \times A_{1,1}^1(o) \quad (S.49)$$

$$\alpha_2 = \frac{\partial}{\partial B_x^2} (\hat{B}_{1,1}^0 \hat{B}_{1,1}^1 - \hat{D}_{1,1}^0 \hat{D}_{1,1}^1)_{B_x} = 0 \quad (S.50)$$

$$\beta_2 = \frac{\partial}{\partial B_x^2} (A_{1,1}^0 \hat{B}_{1,1}^1 + \hat{B}_{1,1}^0 A_{1,1}^1 - C_{1,1}^0 \hat{D}_{1,1}^1 - \hat{D}_{1,1}^0 C_{1,1}^1)_{B_x} = 0 \quad (S.51)$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial}{\partial B_x^2} (A_{1,1}^0 A_{1,1}^1 - C_{1,1}^0 C_{1,1}^1)_{B_x} = 0 \quad (S.52)$$

On désigne par $F(o)$ la valeur à l'origine de la fonction F de B_x .

Il s'ensuit que si l'on égale à zéro le coefficient de chaque puissance de B_x dans le membre de gauche de (S.35), on obtient :

$$\frac{1}{k_{eff}} = \frac{1 + M_{2r} B_x^2 + O(B_x^4)}{k_{\infty}} \quad (S.53)$$

où k_∞ est l'une des solutions de l'équation :

$$\frac{\alpha_0}{k_\infty^2} + \frac{\beta_0}{k_\infty} + \gamma_0 = 0 \quad (\text{S.54})$$

et où M_{2r} est défini par l'égalité :

$$M_{2r} = - \frac{\frac{\alpha_2}{k_\infty^2} + \frac{\beta_2}{k_\infty} + \gamma_2}{2 \frac{\alpha_0}{k_\infty^2} + \frac{\beta_0}{k_\infty}} \quad (\text{S.55})$$

Remplaçons dans (S.54), α_0 , β_0 et γ_0 par leurs valeurs respectivement tirées de (S.47), (S.48) et (S.49). Il vient :

$$(A_{1,1}^0(o) + \frac{1}{k_\infty} \hat{B}_{1,1}^0(o))(A_{1,1}^1(o) + \frac{1}{k_\infty} \hat{B}_{1,1}^1(o)) = 0 \quad (\text{S.56})$$

On en déduit que les solutions de (S.54) sont :

$$k_\infty^0 = - \frac{\hat{B}_{1,1}^0(o)}{A_{1,1}^0(o)}$$

et

$$k_\infty^1 = - \frac{\hat{B}_{1,1}^1(o)}{A_{1,1}^1(o)}$$

Lorsque $B_x = 0$, (S.53) donne :

$$k_{\text{eff}} = k_\infty \quad ; \quad \text{dans ce cas}$$

le gradient $\vec{\nabla} \psi_0^{g,g}$ est nul par suite de la positivité du flux ; en vertu de (S.16), cela entraîne :

$$\vec{V}(g, g) = 0 \quad ,$$

et l'équation (S.35) se réduit à (voir S.5), (S.7) et (S.31)) :

$$A_{1,1}^0(o) + \frac{1}{k_{\text{eff}}} \hat{B}_{1,1}^0(o) = 0$$

Il s'ensuit que (S.54) n'a qu'une solution acceptable : k_{∞}^0 . Compte tenu de (S.33) et de (S.39) à (S.46), cette solution admet pour expression :

$$k_{\infty}^0 = - \frac{b^0(1+1) S_0^1 + d^0(1+1) - (b^0(2+1) S_0^2 + d^0(2+1)) \frac{a^0(1+2) S_0^1 + c^0(1+2)}{a^0(2+2) S_0^2 + c^0(2+2)}}{a^0(1+1) S_0^1 + c^0(1+1)} \quad (S.57)$$

La quantité k_{∞} étant indépendante de B_x , le numérateur de (S.55) peut s'écrire (cf. (S.50) à (S.52)) :

$$\frac{\alpha_2}{k_{\infty}^2} + \frac{\beta_2}{k_{\infty}} + \gamma_2 =$$

$$\frac{\partial}{\partial B_x^2} \left((A_{1,1}^0 + \frac{1}{k_{\infty}} \hat{B}_{1,1}^0) (A_{1,1}^1 + \frac{1}{k_{\infty}} \hat{B}_{1,1}^1) - (C_{1,1}^0 + \frac{1}{k_{\infty}} \hat{D}_{1,1}^0) (C_{1,1}^1 + \frac{1}{k_{\infty}} \hat{D}_{1,1}^1) \right)_{B_x=0}$$

Le premier terme non nul des développements de $C_{1,1}^0$, $C_{1,1}^1$, $\hat{D}_{1,1}^0$ et $\hat{D}_{1,1}^1$ en puissance de B_x est d'ordre un. Par ailleurs, k_{∞} obéit à la relation :

$$A_{1,1}^0(o) + \frac{\hat{B}_{1,1}^0(o)}{k_{\infty}} = 0$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial B_x^2} \left[\left(A_{1,1}^0 + \frac{1}{k_\infty} \hat{B}_{1,1}^0 \right) \left(A_{1,1}^1 + \frac{1}{k_\infty} \hat{B}_{1,1}^1 \right) - \left(C_{1,1}^0 + \frac{1}{k_\infty} \hat{D}_{1,1}^0 \right) \left(C_{1,1}^1 + \frac{1}{k_\infty} \hat{D}_{1,1}^1 \right) \right]_{B_x=0} \\
&= \left(A_{1,1}^1(0) + \frac{1}{k_\infty} \hat{B}_{1,1}^1(0) \right) \frac{\partial}{\partial B_x^2} \left(A_{1,1}^0 + \frac{1}{k_\infty} \hat{B}_{1,1}^0 \right)_{B_x=0} \\
&\quad - \lim_{B_x \rightarrow 0} \left(\frac{C_{1,1}^0 + \frac{1}{k_\infty} \hat{D}_{1,1}^0}{B_x} \right) \times \lim_{B_x \rightarrow 0} \left(\frac{C_{1,1}^1 + \frac{1}{k_\infty} \hat{D}_{1,1}^1}{B_x} \right)
\end{aligned}$$

et que (voir (S.47) et (S.48)) :

$$\frac{2}{k_\infty^2} \alpha_0 + \frac{\beta_0}{k_\infty} = - A_{1,1}^0(0) \left(A_{1,1}^1(0) + \frac{1}{k_\infty} \hat{B}_{1,1}^1(0) \right)$$

Portons ces résultats dans (S.55). On obtient :

$$M_{2r} = \frac{\frac{\partial}{\partial B_x^2} \left(A_{1,1}^0 + \frac{1}{k_\infty} \hat{B}_{1,1}^0 \right)_{B_x=0}}{A_{1,1}^0(0)} - \frac{\lim_{B_x \rightarrow 0} \left(\frac{C_{1,1}^0 + \frac{1}{k_\infty} \hat{D}_{1,1}^0}{B_x} \right) \lim_{B_x \rightarrow 0} \left(\frac{C_{1,1}^1 + \frac{1}{k_\infty} \hat{D}_{1,1}^1}{B_x} \right)}{A_{1,1}^0(0) \left(A_{1,1}^1(0) + \frac{1}{k_\infty} \hat{B}_{1,1}^1(0) \right)}$$

(S.58)

On substitue à $\hat{B}_{1,1}^\varepsilon$ et $\hat{D}_{1,1}^\varepsilon$ leurs expressions tirées de (S.33) et (S.34) et on se sert des relations (S.39) à (S.46) pour atteindre les valeurs des dérivées et des limites. Après un calcul long, mais sans difficultés, on aboutit à la formule :

$$M_{2r} = M_{2r_{pol}} + \frac{4}{A_{1,1}^0(o)} \left\{ \frac{B^0 A^{01}}{k_\infty A_{2,2}^0(o) A_{2,2}^1(o)} - \frac{\left(a^0(1+1) S_{2x^2}^1 + \frac{1}{k_\infty} (b^0(1+1) S_{2x^2}^1 \right. \right. \\ \left. \left. + B^0 \frac{A_{1,2}^1(o)}{A_{2,2}^1(o)} - B_{2,1}^0(o) \frac{a^0(1+2) S_{2x^2}^1}{A_{2,2}^0(o)} \right) \times \left(a^1(1+1) k_m^1 S_{2x^2}^1 + \frac{1}{k_\infty} (b^1(1+1) k_m^1 S_{2x^2}^1 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{B_{2,1}^1(o)}{A_{2,2}^0(o) A_{2,2}^1(o)} A^{01} - b^1(2+1) k_m^2 S_{2x^2}^2 \frac{A_{1,2}^0(o)}{A_{2,2}^0(o)} \right) \right\} \\ \left. A_{1,1}^1(o) + \frac{1}{k_\infty} \left(B_{1,1}^1(o) - B_{2,1}^1(o) \frac{A_{1,2}^1(o)}{A_{2,2}^1(o)} \right) \right\} \quad (S.59)$$

On a posé :

$$M_{2r_{pol}} = \frac{- a^0(1+1) S_{ox^2}^1 + \frac{1}{k_\infty} \left(- b^0(1+1) S_{ox^2}^1 + b^0(2+1) S_{ox^2}^2 \frac{A_{1,2}^0(o)}{A_{2,2}^0(o)} + \frac{B_{2,1}^0(o)}{(A_{2,2}^0(o))^2} A^{00} \right)}{A_{1,1}^0(o)} \quad (S.60)$$

et

$$A^{00} = a^0(1+2) S_{ox^2}^1 A_{2,2}^0(o) - a^0(2+2) S_{ox^2}^2 A_{1,2}^0(o) \quad (S.61)$$

$$A^{01} = a^1(1+2) k_m^1 S_{2x^2}^1 A_{2,2}^0(o) - a^1(2+2) k_m^2 S_{2x^2}^2 A_{1,2}^0(o) \quad (S.62)$$

$$B^0 = \left(\frac{B_{2,1}^0(o)}{A_{2,2}^0(o)} a^0(2+2) - b^0(2+1) \right) S_{2x^2}^2 \quad (S.63)$$

Remarquons qu'il a été possible d'éliminer $S_{x^4}^1$ et $S_{x^4}^2$ au cours du calcul.

La quantité $M_{2r_{pol}}$ est la valeur obtenue pour l'aire de migration radiale lorsque l'on se limite à l'approximation polaire.

On sait (voir annexe F) que la somme

$$S_o^g = \sum_{j \neq k} K_o (K_m^g |\vec{r}_j - \vec{r}_k|)$$

peut être représentée par l'expression⁽¹⁾ :

$$S_o^g = \frac{K_1 (K_m^g b)}{I_1 (K_m^g b)} + \frac{\frac{3}{2} - I_f}{2} + O(K_m^g \ln K_m^g) \quad (S.64)$$

dans laquelle b est le rayon équivalent de la cellule du réseau ($\pi b^2 = V_{cel}$) et I_f le facteur de forme de la cellule (indépendant de K_m et de b).

Si l'on se reporte aux formules (S.37) et (S.38), on voit que :

$$S_{2x^2}^g = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial K_m^g} (S_o^g) \quad (S.65)$$

$$S_{ox^2}^g = -\frac{1}{K_m^g} \frac{\partial}{\partial K_m^g} (K_m^g S_{2x^2}^g) \quad (S.66)$$

En dérivant terme à terme (S.64), on obtient successivement :

$$S_{2x^2}^g = \frac{1}{4 K_m^g (I_1 (K_m^g b))^2} + O(K_m^g \ln K_m^g) \quad (S.67)$$

⁽¹⁾ Voir renvoi (1) de la page 3 de l'annexe M.

$$S_{ox2}^g = \frac{b}{2 K_m^g} \frac{I_0(K_m^g b) - \frac{I_1(K_m^g b)}{K_m^g b}}{(I_1(K_m^g b))^3} + O(\ln K_m^g) \quad (S.68)$$

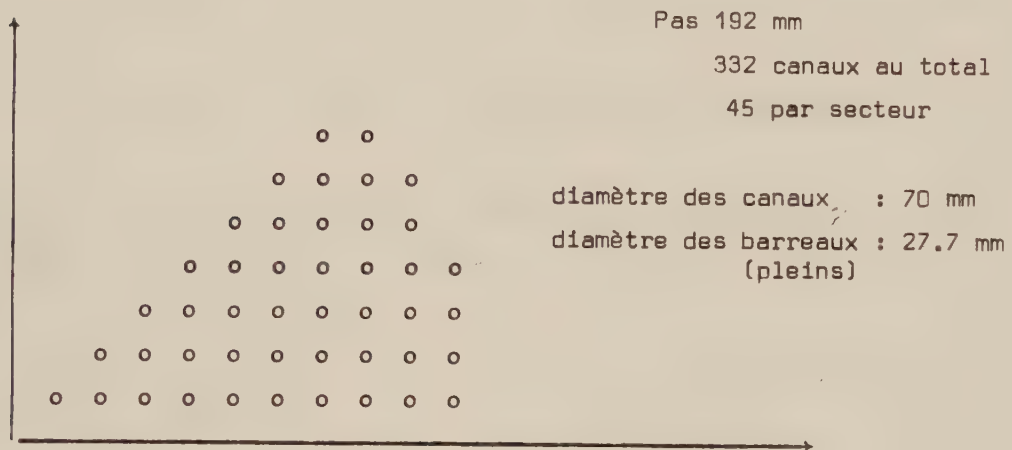
Partant du sous-programme de FODITH qui calcule les coefficients caractéristiques hétérogènes, on a programmé sur IBM 360/91 les expressions (S.57) de k_∞ et (S.59) de M_{2r} . Le code obtenu M2HET fournit les valeurs de k_∞ et de l'aire de migration radiale d'un réseau carré de hauteur infinie en 30 centièmes de seconde.

ANNEXE T

REPRESENTATION SCHEMATIQUE DES REACTEURS

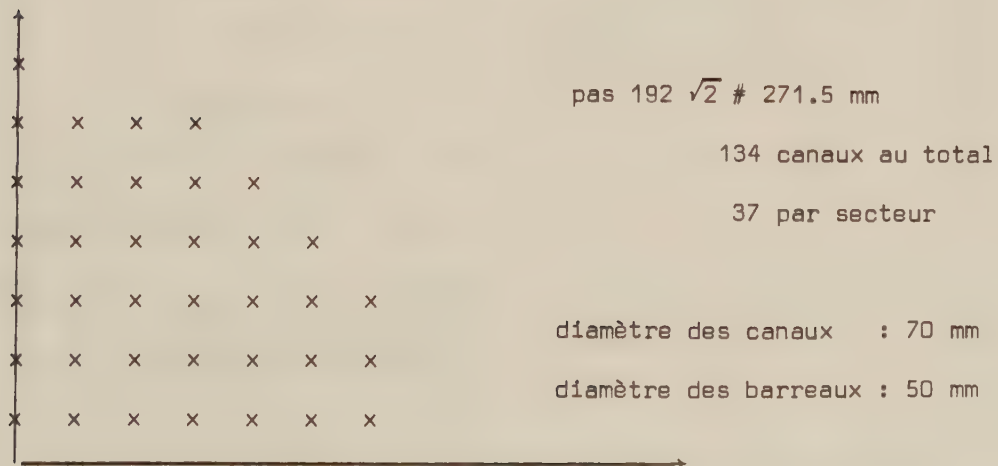
1A1B28A1, 1C1B50B, 2D2B50D/2D2B50D, 2D3B50D/2D3B50D, 2D4B50D/2D4B50D,
2D5B50D/2D4B50D, 1E4B50B/1C1B31/1C1B50B

I - Le réacteur 1A1B28A1 possède une symétrie 8. Seul le secteur, dont il se déduit par symétrie, est représenté :

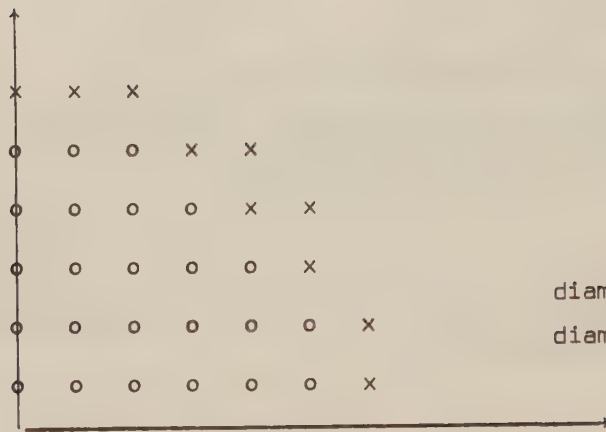


II - Les réacteurs 1C1B50B, 2D2B50D/2D2B50D, 2D3B50D/2D3B50D, 2D4B50D/2D4B50D, 2D5B50D/2D4B50D possèdent une symétrie 4. Seul leur premier quart est représenté :

a) Réacteur 1C1B50B



b) Réacteur 2D2B50D/2D2B50D

Pas $224\sqrt{2}$ # 316.8 mm

o zone centrale

x zone périphérique

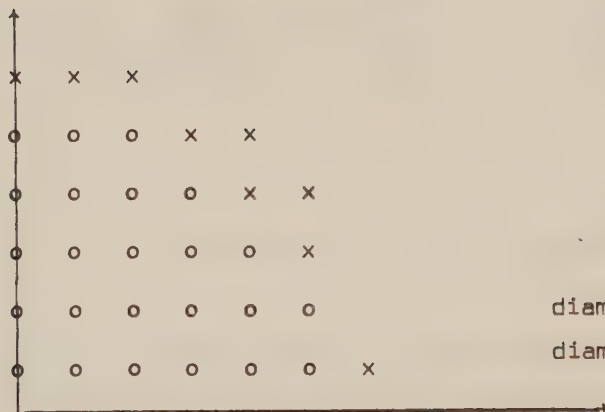
124 canaux au total

34 par secteur

diamètre des canaux : 90 mm

diamètre des barreaux : 50 mm

c) Réacteur 2D3B50D/2D3B50D



Pas 316.8 mm

o zone centrale

x zone périphérique

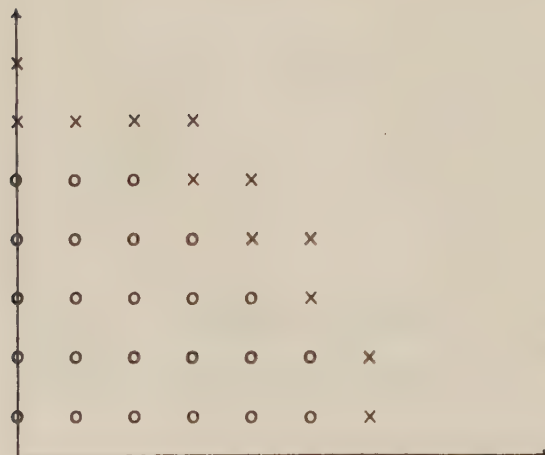
120 canaux au total

33 canaux par secteur

diamètre des canaux : 110 mm

diamètre des barreaux : 50 mm

d) Réacteur 2D4B50D/2D4B50D



Pas 316.8 mm

o zone centrale

x zone périphérique

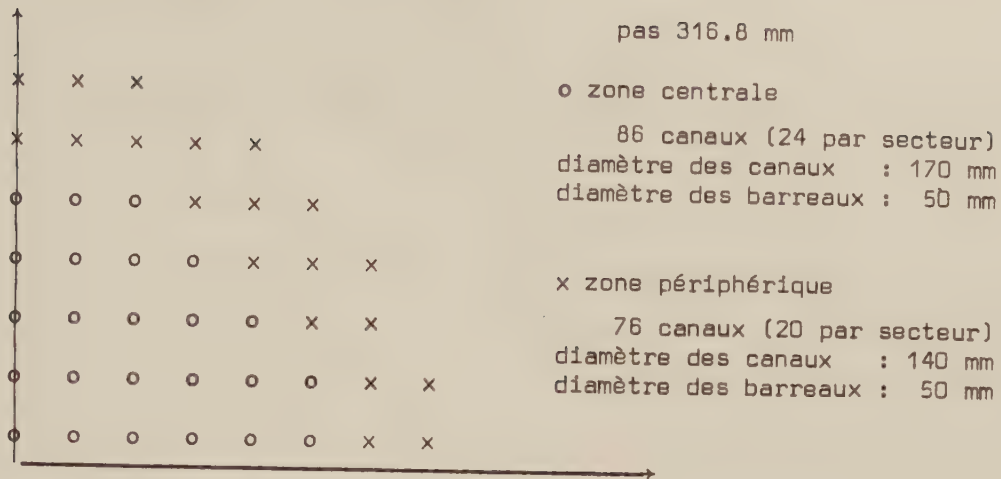
130 canaux au total

36 canaux par secteur

diamètre des canaux : 140 mm

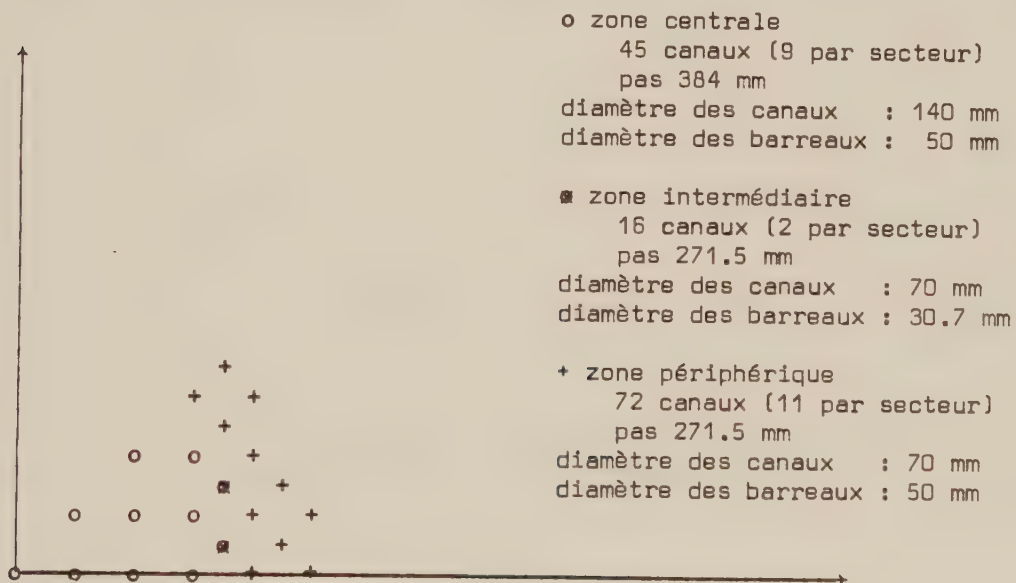
diamètre des barreaux : 50 mm

c) Réacteur 2D5B50D/2D4B50D



Au total 162 canaux (44 par secteur)

III - Le réacteur à trois zones 1E4B50B/1C1B31/1C1B50B possède une symétrie 8. Seul le secteur dont il se déduit par symétrie est représenté.



Au total 133 canaux (22 par secteur).

Nota : Tous ces réacteurs (réflecteur de graphite compris) sont cylindriques et ont pour rayon 311 cm.

ANNEXE U

EXPRESSION DU RAPPORT $\frac{\text{MAX-MIN}}{\text{MOY}}$ DU FLUX THERMIQUE A LA PERIPHERIE DU BARREAU

Il est facile de voir que si l'on néglige les harmoniques d'ordre impair supérieur à un du développement en série de FOURIER du flux autour de l'axe du canal, la différence entre le maximum et le minimum du flux autour du barreau a pour valeur⁽¹⁾ :

$$\text{MAX} - \text{MIN} = 2 a \nabla \phi,$$

en désignant par a le rayon du barreau et par $\nabla \phi$ le gradient moyen du flux à travers le barreau.

En toute généralité, on peut écrire que la valeur moyenne du flux autour du barreau est égale à la valeur du flux polaire à la surface du barreau :

$$\text{MOY} = \phi(a)$$

On a, par suite :

$$\frac{\text{MAX} - \text{MIN}}{\text{MOY}} = \frac{2 a \nabla \phi}{\phi(a)} \quad (\text{U.1})$$

Avec les notations de la page 16 de [10], on peut démontrer qu'au niveau du groupe thermique, il existe la relation :

$$\phi(a) = \frac{G' \left(1 - S \left(1 - \frac{1}{G'}\right)\right)}{\sum_{au} \pi a^2} \quad (\text{U.2})$$

⁽¹⁾ Conformément à l'esprit de la section B du chapitre V, on fait abstraction de la dépendance axiale.

dans laquelle i est le taux d'absorption thermique ; S la source (intégrée dans le volume du barreau) formée par les neutrons entrant dans le groupe thermique à la suite d'un choc dans le combustible ; Σ_{au} la section efficace d'absorption thermique du barreau ; G' la quantité qui intervient dans le calcul ABH de f et qui représente dans le groupe thermique (à condition d'admettre la validité de l'hypothèse de semi-isotropie du flux à la frontière du barreau) le rapport (noté habituellement G) des valeurs moyennes du flux respectivement à la périphérie et dans le volume du barreau, en l'absence de source S .

$$\text{On a :} \quad G' = \frac{1}{\mathcal{P}} - a \Sigma_{au} ;$$

la quantité $\mathcal{P}$ représente la probabilité de sortie du barreau pour un neutron y naissant isotropiquement et uniformément.

Démonstration : On peut écrire :

$$\phi(a) = 2 (J^+(a) + J^-(a)) \quad (\text{Semi-isotropie du flux}) \quad (U.3)$$

$$J^+(a) = J^-(a)(1 - \Gamma_u^+) + \frac{S}{2\pi a} \mathcal{P} \quad (\text{Relation de conservation au sens des probabilités}) \quad (U.4)$$

$$2\pi a(J^+(a) - J^-(a)) = S - 1 \quad (\text{Relation de conservation habituelle}) \quad (U.5)$$

De (U.4) et (U.5), on tire :

$$J^-(a) = - \frac{S(1 - \mathcal{P})}{2\pi a \Gamma_u^+} + \frac{1}{2\pi a \Gamma_u^+} \quad (U.6)$$

En remplaçant, dans (U.3), $J^+(a)$ par sa valeur tirée de (U.4), il vient :

$$\phi(a) = 2 \left[\frac{S}{2\pi a} \mathcal{P} + J^-(a) (2 - \Gamma_u^+) \right]$$

Compte tenu de (U.6), cette relation s'écrit encore :

$$\begin{aligned}\phi(a) &= \frac{1}{\pi a} \left[S \mathcal{P} + (2 - \Gamma_U^+) \left(-\frac{S(1 - \mathcal{P})}{\Gamma_U^+} + \frac{i}{\Gamma_U^+} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\pi a} \left(\frac{2}{\Gamma_U^+} - 1 \right) i + \frac{1}{\pi a} S \left[\mathcal{P} - \left(\frac{2}{\Gamma_U^+} - 1 \right) (1 - \mathcal{P}) \right]\end{aligned}$$

En faisant intervenir l'égalité $\Gamma_U^+ = 2a \Sigma_{au} \mathcal{P}$ (voir page 5 de [10]), on obtient :

$$\phi(a) = \frac{1}{\pi a^2 \Sigma_{au}} \left(\frac{1}{\mathcal{P}} - a \Sigma_{au} \right) i + \frac{1}{\pi a^2 \Sigma_{au}} S \left(1 - \left(\frac{1}{\mathcal{P}} - a \Sigma_{au} \right) \right)$$

En remplaçant $\frac{1}{\mathcal{P}} - a \Sigma_{au}$ par G' , on aboutit finalement à :

$$\phi(a) = \frac{G'}{\pi a^2 \Sigma_{au}} \left(i - S \left(1 - \frac{1}{G'} \right) \right)$$

De (U.1) et (U.2), il résulte que :

$\frac{\text{MAX} - \text{MIN}}{\text{MOY}} = \frac{2\pi a^3 \Sigma_{au}}{G' \left(1 - \frac{S}{1} \left(1 - \frac{1}{G'} \right) \right)} \frac{\nabla \phi}{i}$

ANNEXE V

VALEUR DU PREMIER TERME DE LA FORMULE THEORIQUE DU COEFFICIENT DE DIFFUSION
DE BENOIST LORSQUE TOUS LES MILIEUX DE LA CELLULE ONT LA MEME SECTION
EFFICACE MACROSCOPIQUE TOTALE ET QUE LE CHOC EST ISOTROPE

1 - Calcul rigoureux

Suivant les notations du chapitre IV, au niveau du groupe g, le premier terme de la formule théorique du coefficient de diffusion de BENOIST s'écrit ⁽¹⁾ :

$$D_{ox}^g \text{ c.m.} = \frac{\int_{V_{cel}} j_{1xx}^g dV}{\int_{V_{cel}} \phi_o^g dV} \quad (V.1)$$

avec
$$j_{1xx}^g = \int_{(4\pi)} v_{1x}^g \Omega_x d\Omega \quad (V.2)$$

et
$$\text{div } \vec{\Omega} v_{1x}^g + \Sigma_t^g v_{1x}^g = \frac{1}{4\pi} \hat{\Sigma}_s^g \phi_{1x} + \frac{\mu_o}{4\pi} P_f^g \phi_{1x} + \Omega_x v_o^g \quad (V.3)$$

$$\text{div } \vec{\Omega} v_o^g + \Sigma_t^g v_o^g = \frac{1}{4\pi} \hat{\Sigma}_s^g \phi_o + \frac{\mu_o}{4\pi} P_f^g \phi_o \quad (V.4)$$

Les symboles $\hat{\Sigma}_s^g$ et P_f^g désignent respectivement les opérateurs de transfert par choc et par fission des neutrons vers le groupe g. On suppose que Σ_t^g a même valeur dans tous les milieux de la cellule et que le choc est isotrope. On n'impose pas à $\hat{\Sigma}_s^g$ d'être uniforme dans toute la cellule.

(1) La notation c.m. sert à rappeler que l'on a affaire au coefficient de diffusion selon la loi du "carré moyen".

Multiplions respectivement (V.3) et (V.4) par Ω_x et Ω_x^2 et intégrons sur l'angle solide (4π) et le volume de la cellule.

Compte tenu de (V.2), on obtient, en appelant S_{cel} la surface extérieure de la cellule ⁽¹⁾ :

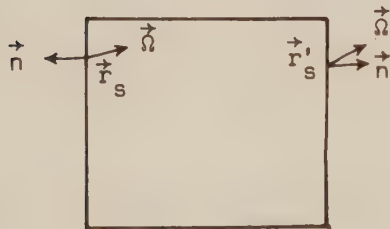
$$\int_{S_{cel}} dS \vec{n} \cdot \int_{(4\pi)} \vec{\Omega} \Omega_x v_{1x}^g d\Omega + \Sigma_t^g \int_{V_{cel}} j_{1xx}^g = \int_{V_{cel}} dV \int_{(4\pi)} \Omega_x^2 v_o^g d\Omega$$

(V.5)

$$\int_{S_{cel}} dS \vec{n} \cdot \int_{(4\pi)} \vec{\Omega} \Omega_x^2 v_o^g d\Omega + \Sigma_t^g \int_{V_{cel}} dV \int_{(4\pi)} \Omega_x^2 v_o^g d\Omega = \frac{1}{3} \left[\int_{V_{cel}} (\hat{\Sigma}_s^g + \mu_o p_f^g) \phi_o dV \right]$$

(V.6)

On ne fait aucune hypothèse sur la forme de la cellule. Mais le réseau étant périodique, les intégrales de surface dans (V.5) et (V.6) sont nulles. En effet, à tout point (voir figure) $\vec{r}_S$ de la surface correspond un point $\vec{r}'_S$ de la face opposée tel que :



$$\left. \begin{aligned} v_o^g(\vec{r}_S, \vec{\Omega}) &= v_o^g(\vec{r}'_S, \vec{\Omega}) \\ v_{1x}^g(\vec{r}_S, \vec{\Omega}) &= v_{1x}^g(\vec{r}'_S, \vec{\Omega}) \end{aligned} \right\} \text{ pour tout } \vec{\Omega}$$

(Si on a $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0$ en $\vec{r}_S$, en $\vec{r}'_S$ on a $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0$ et vice-versa).

Pour la même raison, l'intégration (non pondérée) de (V.4) sur (4π) et le volume de la cellule donne :

$$\Sigma_t^g \int_{V_{cel}} \phi_o^g dV = \int_{V_{cel}} (\hat{\Sigma}_s^g + \mu_o p_f^g) \phi_o dV$$

(1) On rappelle que : $\int_{(4\pi)} \Omega_x^2 d\Omega = \frac{4\pi}{3}$

Compte tenu de ces remarques, l'élimination de $\int_{V_{\text{cel}}} dV \int_{(4\pi)} \Omega_{\mathbf{x}}^2 v_{\mathbf{o}}^g d\Omega$

entre (V.5) et (V.6) conduit immédiatement à :

$$\int_{V_{\text{cel}}} j_{\mathbf{lxx}}^g dV = \frac{1}{3 \Sigma_t^g} \int_{V_{\text{cel}}} \phi_{\mathbf{o}}^g dV$$

Il s'ensuit que le coefficient de diffusion selon le carré moyen a pour valeur au niveau du groupe g :

$$D_{\text{ox}}^g \text{ c.m.} = \frac{\lambda_t^g}{3}$$

2 - Calcul où l'on fait l'approximation d'isotropie et d'uniformité du flux $v_{\mathbf{o}}^g$ dans chacun des milieux de la cellule

Cela revient à remplacer dans l'équation (V.3), à l'intérieur de chaque milieu i de la cellule, $v_{\mathbf{o}}^g$ par sa valeur moyenne $\frac{\phi_i^g}{4\pi}$ sur l'angle solide (4π) et le volume V_i du milieu i.

On multiplie l'équation obtenue par $\Omega_{\mathbf{x}}$ et on l'intègre sur (4π) et V_{cel} . Il vient, compte tenu de la périodicité du réseau :

$$\Sigma_t^g \int_{V_{\text{cel}}} j_{\mathbf{lxx}}^g dV = \frac{1}{4\pi} \int_{(4\pi)} \Omega_{\mathbf{x}}^2 d\Omega \left[\sum_i V_i \phi_i^g \right]$$

Cela peut encore s'écrire :

$$\Sigma_t^g \int_{V_{\text{cel}}} j_{\mathbf{lxx}}^g dV = \frac{1}{3} \int_{V_{\text{cel}}} \phi_{\mathbf{o}}^g dV$$

Nous obtenons comme précédemment :

$$D_{ox}^g = \frac{\lambda_t^g}{3 \text{ c.m.}}$$

ANNEXE W

CALCUL DE P_u^+ , P_c^+ et $P_{\bar{u}}^+$

Les notations et conventions adoptées sont évidemment celles de l'annexe H.

Les quantités P_u^+ , P_c^+ et $P_{\bar{u}}^+$ sont définies par les égalités :

$$P_u^+ = \lambda_m + (\lambda_u - \lambda_m) P_{uu}^+ + \frac{V_c \lambda_u}{V_u} P_{cu}^+ + \frac{3}{4} a \sum_{au} \lambda_u P_{\bar{u}u}^+ \quad (W.1)$$

$$P_c^+ = \frac{V_c \lambda_u}{V_u \lambda_c} \lambda_m + (\lambda_u - \lambda_m) P_{uc}^+ + \frac{V_c \lambda_u}{V_u} P_{cc}^+ + \frac{3}{4} a \sum_{au} \lambda_u P_{\bar{u}c}^+ \quad (W.2)$$

$$P_{\bar{u}}^+ = -\frac{3}{4} a \sum_{au} \lambda_u + (\lambda_u - \lambda_m) P_{u\bar{u}}^+ + \frac{V_c \lambda_u}{V_u} P_{c\bar{u}}^+ + \frac{3}{4} a \sum_{au} \lambda_u P_{\bar{u}\bar{u}}^+ \quad (W.3)$$

On suppose qu'un barreau identique à celui que contient le canal considéré en annexe H, est entouré par du vide jusqu'à l'infini. Dans le barreau est répartie la source d'intensité angulaire :

$$(\lambda_u - \lambda_m) \frac{3}{4\pi V_u} \Omega_x + \frac{3}{4\pi V_u} \sum_{au} \lambda_u x$$

Dans le vide est répartie la source d'intensité angulaire :

$$\frac{3}{4\pi V_u} \lambda_u \Omega_x$$

Le flux angulaire solution de l'équation du transport avec ces sources dans le barreau et le vide, a pour expression :

$$v = \frac{3}{4\pi V_u} \lambda_u \left(x - \lambda_m \Omega_x \right)$$

La capture fictive de ce flux a pour valeur dans le barreau :

$$- \lambda_m,$$

dans la couronne de vide limitée à l'intérieur par la surface du barreau et à l'extérieur par une surface cylindrique de rayon c axée sur le barreau :

$$- \lambda_m \frac{V_c \lambda_u}{V_u \lambda_c}$$

Quant à sa capture "en x" dans le barreau, elle vaut :

$$\frac{3}{4} a \Sigma_{au} \lambda_u$$

Chacune de ces captures peut encore s'obtenir, en vertu du théorème de complémentarité (cf.[14]), en ajoutant à la contribution des sources situées à l'intérieur de la surface cylindrique de rayon c, la contribution d'une source de neutrons entrant à travers cette surface, d'intensité angulaire :

$$\frac{3}{4\pi V_u} \lambda_u \left(c \cos \alpha - \lambda_m \Omega_x \right)$$

On a donc les égalités :

$$- \lambda_m = (\lambda_u - \lambda_m) P_{uu}^+ + \frac{V_c}{V_u} \lambda_u P_{cu}^+ + \frac{3}{4} a \Sigma_{au} \lambda_u P_{uu}^-$$

$$- \frac{3}{4\pi V_u} \lambda_u \left(\frac{2\pi^2 c^2}{3} \Gamma_{ux}^{' +} + \lambda_m \frac{3\pi^2 c}{4} \Gamma_{u\Omega_x}^{' +} \right) \quad (W.4)$$

$$\begin{aligned}
-\lambda_m \frac{V_c}{V_u} \frac{\lambda_u}{\lambda_c} &= (\lambda_u - \lambda_m) P_{uc}^+ + \frac{V_c}{V_u} \lambda_u P_{cc}^+ + \frac{3}{4} a \Sigma_{au} \lambda_u P_{uc}^+ \\
&- \frac{3}{4\pi V_u} \lambda_u \left(\frac{2\pi^2 c^2}{3} \Gamma_{cx}^{' +} + \lambda_m \frac{3\pi^2 c}{4} \Gamma_{c\Omega_x}^{' +} \right) \quad (W.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4} a \Sigma_{au} \lambda_u &= (\lambda_u - \lambda_m) P_{u\bar{u}}^+ + \frac{V_c}{V_u} \lambda_u P_{c\bar{u}}^+ + \frac{3}{4} a \Sigma_{au} \lambda_u P_{u\bar{u}}^+ \\
&- \frac{3}{4\pi V_u} \left(\frac{2\pi^2 c^2}{3} \Gamma_{\bar{u}x}^{' +} + \lambda_m \frac{3\pi^2 c}{4} \Gamma_{\bar{u}\Omega_x}^{' +} \right) \quad (W.6)
\end{aligned}$$

où $\Gamma_{jx}^{' +}$ (respectivement $\Gamma_{\bar{j}x}^{' +}$) représente la probabilité pour un neutron, entrant fictivement dans le canal avec l'intensité angulaire $\frac{3 \cos \alpha}{2 \pi^2 c}$ d'être capturé fictivement (resp. "en x") dans le milieu j sans être retourné dans le modérateur ;

et où $\Gamma_{j\Omega_x}^{' +}$ (respectivement $\Gamma_{\bar{j}\Omega_x}^{' +}$) représente la probabilité pour un neutron, entrant fictivement dans le canal avec l'intensité angulaire $\frac{4}{3 \pi^2 c} \Omega_x$ d'être également capturé fictivement (respectivement "en x") dans j sans être retourné dans le modérateur.

De (W.4), (W.5) et (W.6), compte tenu de (W.1), (W.2) et (W.3), on tire :

$$P_u^+ = \frac{\pi c^2}{2 V_u} \lambda_u \lambda_m \left(\frac{\Gamma_{ux}^{' +}}{\lambda_m} + \frac{9}{8c} \Gamma_{u\Omega_x}^{' +} \right)$$

$$P_c^+ = \frac{\pi c^2}{2 V_u} \lambda_u \lambda_m \left(\frac{\Gamma_{cx}^{' +}}{\lambda_m} + \frac{9}{8c} \Gamma_{c\Omega_x}^{' +} \right)$$

$$P_{\bar{u}}^+ = \frac{\pi c^2}{2 V_u} \lambda_u \lambda_m \left(\frac{\Gamma_{\bar{u}x}^{' +}}{\lambda_m} + \frac{9}{8c} \Gamma_{\bar{u}\Omega_x}^{' +} \right)$$

ANNEXE X

FORMULE APPROCHÉE DE LA CORRECTION D'ANISOTROPIE DE SOURCE RELATIVE AU COEFFICIENT DE DIFFUSION RADIAL THERMIQUE

Les notations et les conventions adoptées sont celles du chapitre IV (en particulier, on suppose la cellule cylindrique). En outre, on désigne par j_{ox} la composante x du courant $\vec{j}_0$ ($= \int_{(4\pi)} v_0 \vec{\Omega} d\Omega$) associé au flux (de structure fine) d'ordre zéro.

La correction d'anisotropie de source a pour expression exacte :

$$\delta \frac{j_{ox}}{\frac{1}{3} \lambda_m} = \frac{\int_{V_{cel}} x j_{ox} dV}{\frac{1}{3} \lambda_m V_t \phi_t} \quad (X.1)$$

Comme les sources de v_0 sont de révolution autour de l'axe de la cellule, le courant $\vec{j}_0$ est colinéaire au rayon vecteur $\vec{\rho}$ partant de l'axe de la cellule. On écrit :

$$\vec{j}_0(\vec{\rho}) = j_0(\rho) \cdot \frac{\vec{\rho}}{\rho}$$

De ce fait, on a :

$$j_{ox} = j_0(\rho) \cos \alpha$$

où α désigne l'angle qui amène $\vec{\rho}$ sur Ox.

Compte tenu de cette égalité et de $x = \rho \cos \alpha$, l'expression (X.1) peut encore s'écrire :

$$\delta \frac{D_{ox}}{\frac{1}{3} \lambda_m} = \frac{\int_0^{2\pi} d\alpha \cos^2 \alpha \int_0^b \rho^2 j_o(\rho) d\rho}{\frac{\lambda_m}{3} V_t \phi_t}$$

L'intégration sur l'angle solide (4π) de l'équation (IV.A.4) conduit à la relation de conservation :

$$\text{div } \vec{j}_o + \sum_a \phi_o = q \delta_m$$

En coordonnées cylindriques, cette relation s'écrit :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho j_o) + \sum_a \phi_o = q \delta_m$$

On en multiplie les deux membres par ρ^3 et on intègre de 0 à b. Il vient :

$$\int_0^b \rho^2 \frac{d}{d\rho} (\rho j_o) d\rho = - \int_0^b \sum_a \phi_o \rho^3 d\rho + \int_c^b q \rho^3 d\rho \quad (X.2)$$

En intégrant par parties, on obtient l'égalité suivante :

$$\int_0^b \rho^2 \frac{d}{d\rho} (\rho j_o) d\rho = \left[\rho^3 j_o \right]_0^b - 2 \int_0^b \rho^2 j_o d\rho$$

La variation de la fonction $\rho^3 j_o$ est nulle entre 0 et b car $\vec{j}_o$ est nul au centre et au bord de la cellule (par suite de la symétrie de la cellule et de la périodicité du réseau).

Par conséquent, on peut écrire :

$$\int_0^b \rho^2 j_o d\rho = \frac{1}{2} \left[\int_0^b \sum_a \phi_o \rho^3 d\rho - \int_c^b q \rho^3 d\rho \right] \quad (X.3)$$

On admet qu'on peut remplacer ϕ_0 , dans le modérateur, par sa partie asymptotique, tirée de (IV.C.1) et (IV.C.5). Cela nous permet de disposer de la relation :

$$\int_c^b \Sigma_{am} \phi_0 \cdot \rho^3 d\rho = \int_c^b q \rho^3 d\rho - \gamma_{ub} \Sigma_{au} q \int_c^b \Delta_0(K_m \rho) \rho^3 d\rho$$

De (IV.C.6) et (IV.D.10), on tire :

$$\gamma_{ub} \Sigma_{au} = \frac{K_m V_m f}{2 \pi c \Delta_1(K_m c)}$$

Par ailleurs, il est facile de montrer⁽¹⁾ que :

$$\int_c^b \Delta_0(K_m \rho) \rho^3 d\rho = \frac{c^3}{K_m} \Delta_1(K_m c) - \frac{2b}{K_m^3} + \frac{2c^2}{K_m^2} \Delta_2(K_m c)$$

(1) Par définition, on a :

$$\Delta_0(K_m \rho) = I_1(K_m b) K_0(K_m \rho) + K_1(K_m b) I_0(K_m \rho)$$

Par application directe des formules de [16B], on obtient successivement :

$$\int_c^b K_0(K_m \rho) \rho^3 d\rho = \left[-\rho^3 \frac{K_1(K_m \rho)}{K_m} \right]_c^b + \frac{2}{K_m} \int_c^b \rho^2 K_1(K_m \rho) d\rho$$

$$\int_c^b I_0(K_m \rho) \rho^3 d\rho = \left[\rho^3 \frac{I_1(K_m \rho)}{K_m} \right]_c^b - \frac{2}{K_m} \int_c^b \rho^2 I_1(K_m \rho) d\rho$$

$$\int_c^b \rho^2 K_1(K_m \rho) d\rho = - \left[\rho^2 \frac{K_2(K_m \rho)}{K_m} \right]_c^b$$

suite page suivante.

En portant ces résultats dans (X.3), on obtient :

$$\int_0^b \rho^2 j_0 d\rho = \frac{1}{2} \left[\Sigma_{au} \int_0^a \phi_0 \rho^3 d\rho - \frac{K_m V_m f}{2\pi c \Delta_1(K_m c)} q \left(\frac{c^3}{K_m} \Delta_1(K_m c) - \frac{2b}{K_m^3} + \frac{2c^2}{K_m^2} \Delta_2(K_m c) \right) \right] \quad (X.4)$$

Il reste à intégrer ϕ_0 dans le volume du barreau. Nous choisirons de représenter ϕ_0 par une formule parabolique du type proposé par BENOIST dans [12] (Annexe IX). Nous reprenons l'expression dont il s'est servi dans [23] :

$$\phi_0(\rho) = \frac{q f V_m}{V_u \Sigma_{au}} \left[2 - G + \frac{2\rho^2}{a^2} (G - 1) \right]$$

suite du renvoi de la page précédente.

$$\int_c^b \rho^2 I_1(K_m \rho) d\rho = \left[\rho^2 \frac{I_2(K_m \rho)}{K_m} \right]_c^b$$

On en déduit que :

$$\int_c^b \Delta_0(K_m \rho) \rho^3 d\rho = - \left[\rho^3 \frac{\Delta_1(K_m \rho)}{K_m} \right]_c^b - \frac{2}{K_m^2} \left[\rho^2 \Delta_2(K_m \rho) \right]_c^b$$

en se rappelant que :

$$\Delta_1(K_m \rho) = I_1(K_m b) K_1(K_m \rho) - K_1(K_m b) I_1(K_m \rho)$$

$$\Delta_2(K_m \rho) = I_1(K_m b) K_2(K_m \rho) + K_1(K_m b) I_2(K_m \rho)$$

Finalement, on trouve :

$$\int_c^b \Delta_0(K_m \rho) \rho^3 d\rho = \frac{c^3}{K_m} \Delta_1(K_m c) - \frac{2b}{K_m^3} + \frac{2c^2}{K_m^2} \Delta_2(K_m c)$$

$$\text{car } \Delta_1(K_m b) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta_2(K_m b) = \frac{1}{K_m b} \quad (\text{cf. [16B]}).$$

Elle préserve à la fois la valeur du flux moyen dans le combustible

$$\bar{\phi}_u = \frac{q \ f \ V_m}{V_u \ \Sigma_{au}}$$

et celle du rapport

$$G = \frac{\phi_o(a)}{\bar{\phi}_u}$$

Son intégration dans (X.4) est immédiate et donne :

$$\int_0^b \rho^2 J_0 \ d\rho = \frac{q \ f \ V_m}{2 \ \pi} \left[\frac{a^2}{6} \left(1 + \frac{G}{2} \right) - \frac{c^2}{2} + \frac{1}{c \ \Delta_1(K_m \ c)} \left(\frac{2b}{K_m^2} - \frac{c^2}{K_m} \Delta_2(K_m \ c) \right) \right]$$

On en déduit, pour la correction d'anisotropie de source applicable au coefficient de diffusion au niveau du groupe thermique, la formule approchée :

$$\delta \frac{D_{ox}}{\frac{1}{3} \lambda_m} = \frac{\frac{q \ f \ V_m}{2} \left[\frac{a^2}{6} \left(1 + \frac{G}{2} \right) - \frac{c^2}{2} + \frac{1}{c \ \Delta_1(K_m \ c)} \left[\frac{b}{K_m^2} - \frac{c^2}{K_m} \Delta_2(K_m \ c) \right] \right]}{\frac{\lambda_m}{3} V_t \ \phi_t} \quad (X.5)$$

car

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \cos^2 \alpha = \pi$$

En développant les fonctions de BESSEL au voisinage de l'origine, on peut montrer que :

$$\Delta_1(K_m \ c) = \frac{1}{2} \frac{b^2 - c^2}{bc} + O(K_m^2)$$

$$\Delta_2(K_m \ c) = \frac{b}{K_m \ c^2} + \frac{K_m}{8b \ c^2} (b^2 - c^2)^2 + O(K_m^3)$$

Il s'ensuit qu'à l'ordre deux près en K_m la formule (X.5) s'écrit :

$$\frac{\delta D_{ox}}{\frac{1}{3} \lambda_m} = \frac{\frac{q f V_m}{2} \left[\frac{a^2}{6} \left(1 + \frac{G}{2} \right) - \frac{b^2 + c^2}{4} \right]}{\frac{\lambda_m}{3} V_t \phi_t} \quad (X.6)$$

Dans les cas qui nous intéressent, G est généralement compris entre 1 et 2 (cf. [12], Annexe IX) et b est très supérieur à $2a$. Par suite, on a :

$$\frac{b^2 + c^2}{4} > \frac{a^2}{6} \left(1 + \frac{G}{2} \right)$$

Cela explique pourquoi on trouve toujours une valeur négative pour la correction d'anisotropie de source dans les calculs numériques.

Nota. La quantité G peut être approximée par $G' = \frac{1}{\mathcal{P}} - a \Sigma_{au}$ (voir le renvoi (1) de la page 170).

Si $\bar{\Sigma}_a$ désigne la section d'absorption de la cellule moyennée sur ϕ_0 , on a :

$$V_m q = \bar{\Sigma}_a V_t \phi_t$$

Il en résulte que (X.6) peut encore s'écrire :

$$\delta D_{ox} = \bar{\Sigma}_a f \left(\frac{a^2}{12} \left(1 + \frac{G}{2} \right) - \frac{b^2 + c^2}{8} \right) \quad (X.7)$$

Pour f proche de l'unité et pour $\frac{a^2}{3} \left(1 + \frac{G}{2} \right)$ et $\frac{c^2}{2}$ négligeables devant $\frac{b^2}{2}$, on retrouve la formule approximative de BLACKBURN [22] pour la correction à l'aire de diffusion :

$$\delta L^2 = - \frac{V_{cel}}{8\pi} \quad (X.8)$$

ANNEXE V

CALCUL DES INTEGRALES

$$\int_c^\infty \rho f_0(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho$$

$$\int_c^\infty \rho^3 f_0(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho$$

et

$$\int_c^\infty \frac{1}{\rho} f_0(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho$$

avec :

$$f_0(\rho, \Sigma_{tm}, c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^2 \varphi \varepsilon_1 \left(\Sigma_{tm} (\sqrt{\rho^2 - c^2 \sin^2 \varphi} - c \cos \varphi) \right)$$

et

$$\varepsilon_1(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta e^{-\frac{x}{\sin \theta}}$$

Quel que soit $h(\rho)$, on a :

$$\int_c^\infty h(\rho) f_0(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^2 \varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta \int_c^\infty d\rho h(\rho) e^{-\frac{\Sigma_{tm} (\sqrt{\rho^2 - c^2 \sin^2 \varphi} - c \cos \varphi)}{\sin \theta}}$$

(Y.1)

On pose :

$$\sqrt{\rho^2 - c^2 \sin^2 \varphi} - c \cos \varphi = r$$

Il vient :

$$\int_c^\infty d\rho \rho e^{-\frac{\Sigma_{tm}(\sqrt{\rho^2 - c^2 \sin^2 \varphi} - c \cos \varphi)}{\sin \theta}} = \int_0^\infty dr (r + c \cos \varphi) e^{-\Sigma_{tm} \frac{r}{\sin \theta}} \quad (*)$$

$$\int_c^\infty d\rho \rho^3 e^{-\frac{\Sigma_{tm}(\sqrt{\rho^2 - c^2 \sin^2 \varphi} - c \cos \varphi)}{\sin \theta}} = \int_0^\infty dr (r^3 + 3 r^2 c \cos \varphi + r c^2 (1 + 2 \cos^2 \varphi) + c^3 \cos \varphi) e^{-\Sigma_{tm} \frac{r}{\sin \theta}} \quad (**)$$

$$\int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} e^{-\frac{\Sigma_{tm}(\sqrt{\rho^2 - c^2 \sin^2 \varphi} - c \cos \varphi)}{\sin \theta}} = \int_0^\infty dr \frac{r + c \cos \varphi}{r^2 + 2r c \cos \varphi + c^2} e^{-\frac{\Sigma_{tm} r}{\sin \theta}} \quad (***)$$

Dans l'intégrale au second membre de (***), on fait le changement de variable $x = r \Sigma_{tm}$ et l'on remplace le produit $c \Sigma_{tm}$ par γ .

On aboutit à :

$$\int_0^\infty dr \frac{r + c \cos \varphi}{r^2 + 2r c \cos \varphi + c^2} e^{-\frac{\Sigma_{tm} r}{\sin \theta}} = \int_0^\infty \frac{x + \gamma \cos \varphi}{x^2 + 2 x \gamma \cos \varphi + \gamma^2} e^{-\frac{x}{\sin \theta}} dx$$

La troisième intégrale à calculer a donc pour expression :

$$\int_c^\infty \frac{1}{\rho} f_0(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^2 \varphi \int_0^\infty dx \varepsilon_1(x) \frac{x + \gamma \cos \varphi}{x^2 + 2 x \gamma \cos \varphi + \gamma^2}$$

Le second membre de cette relation n'est autre que la quantité Y définie par BENOIST à la page 36 de sa thèse [12], au facteur $\frac{3}{\pi} \gamma^2$ près.

On peut donc écrire :

$$\boxed{\int_c^\infty \frac{1}{\rho} f_0(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho = \frac{\pi Y}{3 \gamma^2}} \quad (Y.2)$$

Les seconds membres de (*) et (**) se composent d'intégrales du type :

$$I_n = \int_0^\infty dr r^n e^{-\Sigma_{tm} \frac{r}{\sin \theta}}$$

n étant un entier positif ou nul.

En intégrant I_n par parties, il vient :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-\frac{\sin \theta}{\Sigma_{tm}} e^{-\Sigma_{tm} \frac{r}{\sin \theta}} r^n \right]_0^\infty + n \frac{\sin \theta}{\Sigma_{tm}} \int_0^\infty dr r^{n-1} e^{-\Sigma_{tm} \frac{r}{\sin \theta}} \\ &= n \frac{\sin \theta}{\Sigma_{tm}} I_{n-1} \quad \text{si } n \neq 0 \\ &= \frac{\sin \theta}{\Sigma_{tm}} \quad \text{si } n = 0 \end{aligned}$$

Par récurrence :

$$I_n = n! \left(\frac{\sin \theta}{\Sigma_{tm}} \right)^{n+1}$$

On en conclut que :

$$\int_c^\infty dp \, \rho \, e^{-\frac{\Sigma_{tm}(\sqrt{\rho^2 - c^2} \sin^2 \varphi - c \cos \varphi)}{\sin \theta}} = \frac{\sin \theta}{\Sigma_{tm}} \left(\frac{\sin \theta}{\Sigma_{tm}} + c \cos \varphi \right)$$

$$\int_c^\infty dp \, \rho^3 \, e^{-\frac{\Sigma_{tm}(\sqrt{\rho^2 - c^2} \sin^2 \varphi - c \cos \varphi)}{\sin \theta}} = \frac{\sin \theta}{\Sigma_{tm}} \left(6 \frac{\sin^3 \theta}{\Sigma_{tm}^3} + 6 \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma_{tm}^2} c \cos \varphi \right. \\ \left. + \frac{\sin \theta}{\Sigma_{tm}} c^2 (1 + 2 \cos^2 \varphi) + c^3 \cos \varphi \right)$$

Compte tenu des égalités :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta = 1, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^2 \theta = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^3 \theta = \frac{2}{3}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^4 \theta = \frac{3\pi}{16}$$

et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^5 \theta = \frac{8}{15},$

on trouve :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta \int_c^\infty dp \, \rho \, e^{-\Sigma_{tm} \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2} \sin^2 \varphi - c \cos \varphi}{\sin \theta}} = \frac{1}{\Sigma_{tm}} \left(\frac{2}{3 \Sigma_{tm}} + c \cos \varphi \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta \int_c^\infty dp \, \rho^3 \, e^{-\Sigma_{tm} \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2} \sin^2 \varphi - c \cos \varphi}{\sin \theta}} = \frac{1}{\Sigma_{tm}} \left(\frac{16}{5 \Sigma_{tm}^3} + \frac{9\pi c \cos \varphi}{8 \Sigma_{tm}^2} \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \frac{c^2 (1 + 2 \cos^2 \varphi)}{\Sigma_{tm}} + \frac{\pi c^3 \cos \varphi}{4} \right)$$

Par ailleurs, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^2 \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^3 \varphi = \frac{2}{3}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^4 \varphi = \frac{3\pi}{16}.$$

En vertu de la relation (Y.1), on obtient finalement :

$$\boxed{\int_c^\infty \rho f_o(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho = \frac{\pi}{6 \Sigma_{tm}} \left(\frac{1}{\Sigma_{tm}} + c \right)} \quad (Y.3)$$

$$\boxed{\int_c^\infty \rho^3 f_o(\rho, \Sigma_{tm}, c) d\rho = \frac{\pi}{\Sigma_{tm}} \left(\frac{4}{5 \Sigma_{tm}^3} + \frac{3}{4} \frac{c}{\Sigma_{tm}^2} + \frac{5}{12} \frac{c^2}{\Sigma_{tm}} + \frac{c^3}{6} \right)} \quad (Y.4)$$

ANNEXE 2

CALCUL DE LA VALEUR DU RAPPORT DE LA PARTIE POLAIRE DU FLUX ASYMPTOTIQUE
REGNANT DANS LE MODERATEUR AU COURANT QUI EN DERIVE A LA FRONTIERE DU
CANAL (EN THEORIE MULTIGROUPE)

On trouvera au chapitre III la signification des notations adoptées dans cette annexe.

On suppose que le barreau contenu dans le canal k ne ralentit pas les neutrons et que les sources de fission sont nulles au niveau du groupe g . Compte tenu de (III.A.43), (III.A.48), (III.B.2), (III.B.11), (III.B.12), (III.D.1.3) et (III.D.1.7), la partie polaire du flux asymptotique régnant dans la zone du modérateur proche du canal k a alors pour expression, au niveau du groupe g :

$$\begin{aligned}
 \phi_{as\ pol}^g(\vec{r}) = & \sum_{1 \leq g' < g} m(g', g) N_k(g', g') K_o(K_m^{g'} |\vec{r} - \vec{r}_k|) \\
 & + \left[\sum_{1 \leq g' < g} m(g', g) \frac{\mu_k(g' \rightarrow g)}{K_g^{g'}} N_k(g', g') \right] K_o(K_m^g |\vec{r} - \vec{r}_k|) \\
 & + \left[\sum_{1 \leq g' \leq g} m(g', g) \tilde{\gamma}_k^{g', g} \psi_{ok}^{g', g}(\vec{r}_k) \right] K_o(K_m^g |\vec{r} - \vec{r}_k|) \\
 & + \sum_{1 \leq g' \leq g} m(g', g) \psi_{ok}^{g', g}(\vec{r}_k) I_o(K_m^{g'} |\vec{r} - \vec{r}_k|) \quad (Z.1)
 \end{aligned}$$

Le courant polaire asymptotique à la frontière du canal s'obtient en appliquant la loi de FICK séparément à chacune des composantes de ce

flux. Ce faisant, il convient d'affecter la valeur

$$\frac{\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{k_{g'}}}{(K_m^{g'})^2} \text{ au}$$

coefficient de diffusion modérateur pour calculer la fraction de courant correspondant à une composante admettant la longueur de relaxation $\frac{1}{K_m^{g'}}$ (voir [14] et les égalités (I.1), (III.A.8), (III.A.9) et (III.A.29)).

La projection du courant polaire asymptotique sur la normale entrante à la surface du canal a donc pour intensité :

$$\begin{aligned} J_{ias\ pol}^g(c) = & - \sum_{1 \leq g' < g} m(g', g) N_k(g', g') \left[\frac{\Sigma_{am}^g - \frac{1}{k_{g'}}}{K_m^{g'}} K_1(K_m^{g'} c) \right. \\ & + \frac{\mu_k(g' \rightarrow g)}{K_m^{g'}} \frac{\Sigma_{am}^g}{K_m^{g'}} K_1(K_m^{g'} c) \left. \right] + \sum_{1 \leq g' \leq g} m(g', g) \psi_{ok}^{g', g'}(\vec{r}_k) \left[\frac{\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{k_{g'}}}{K_m^{g'}} I_1(K_m^{g'} c) \right. \\ & \left. - \gamma_k^{g', g} \frac{\Sigma_{am}^g}{K_m^{g'}} K_1(K_m^{g'} c) \right] \quad (Z.2) \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \frac{\phi_{as\ pol}^g(c)}{J_{ias\ pol}^g(c)} = & \frac{\sum_{1 \leq g' < g} m(g', g) N_k(g', g') \left[K_0(K_m^{g'} c) + \frac{\mu_k(g' \rightarrow g)}{K_m^{g'}} K_0(K_m^{g'} c) \right] \dots}{\sum_{1 \leq g' < g} m(g', g) N_k(g', g') \left[\frac{\Sigma_{am}^g - \frac{1}{k_{g'}}}{K_m^{g'}} K_1(K_m^{g'} c) + \frac{\mu_k(g' \rightarrow g)}{K_m^{g'}} \frac{\Sigma_{am}^g}{K_m^{g'}} K_1(K_m^{g'} c) \right] \dots} \\ & \dots + \frac{\sum_{1 \leq g' \leq g} m(g', g) \psi_{ok}^{g', g'}(\vec{r}_k) \left[I_0(K_m^{g'} c) + \gamma_k^{g', g} K_0(K_m^{g'} c) \right]}{\sum_{1 \leq g' \leq g} m(g', g) \psi_{ok}^{g', g'}(\vec{r}_k) \left[\frac{\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta^{g',g}}{k_{g'}}}{K_m^{g'}} I_1(K_m^{g'} c) - \gamma_k^{g', g} \frac{\Sigma_{am}^g}{K_m^{g'}} K_1(K_m^{g'} c) \right]} \quad (Z.3) \end{aligned}$$

On pose :

$$L_{1k}^{g',g} = - \frac{K_0(K_m^{g'} c) + \frac{\mu_k(g' + g)}{K_m^{g'}} K_0(K_m^g c)}{\frac{\Sigma_{am}^g - \frac{1}{K_m^{g'}}}{K_m^{g'}} K_1(K_m^{g'} c) + \frac{\mu_k(g' + g)}{K_m^{g'}} \frac{\Sigma_{am}^g}{K_m^g} K_1(K_m^g c)} \quad (Z.4)$$

$$F_{1k}^{g',g} = \frac{I_0(K_m^{g'} c) + \gamma_k^{g',g} K_0(K_m^g c)}{\frac{\Sigma_{am}^g - \frac{1 - \delta_{g',g}}{K_m^{g'}}}{K_m^{g'}} I_1(K_m^{g'} c) - \gamma_k^{g',g} K_1(K_m^g c) \frac{\Sigma_{am}^g}{K_m^g}} \quad (Z.5)$$

Il est facile de voir⁽¹⁾ que :

$$L_{1k}^{g',g} = 3 \Lambda_k^g + O(K_m^{g^2} \ln K_m^g) \quad (Z.6)$$

$$F_{1k}^{g',g} = 3 \Lambda_k^g \quad (Z.7)$$

Par suite, (Z.3) donne :

$$\frac{\phi_{as\,pol}^g(c)}{J_{ias\,pol}^g(c)} = 3 \Lambda_k^g + O(K_m^{g^2} \ln K_m^g) \quad (Z.8)$$

⁽¹⁾ Dans (Z.4) on remplace $\mu_k(g' + g)$ par sa valeur tirée de (III.A.33).
Il vient :

suite du renvoi page suivante.

suite du renvoi de la page précédente.

$$L_{1k}^{g',g} = - \frac{\frac{\Sigma_{am}^g}{K_m^g} K_O(K_m^{g'} c) K_1(K_m^g c) - \frac{\Sigma_{am}^g - \frac{1}{k_g^g}}{K_m^{g'}} K_1(K_m^{g'} c) K_O(K_m^g c) - \frac{\Sigma_{au_k}^g}{k_g^{g'}} \gamma_{uk}^g h_k(g' \rightarrow g) K_O(K_m^g c)}{\frac{\Sigma_{au_k}^g \gamma_{uk}^g h_k(g' \rightarrow g)}{k_g^{g'}} - \frac{\Sigma_{am}^g K_1(K_m^g c)}{K_m^g}}$$

On a (voir annexe H) :

$$\frac{\Sigma_{am}^g}{K_m^g} = K_m^g \frac{\lambda_m^g}{3} + O(K_m^{g'3})$$

$$\frac{\Sigma_{am}^g - \frac{1}{k_g^g}}{K_m^{g'}} = K_m^{g'} \frac{\lambda_m^g}{3} + O(K_m^{g'3})$$

Portons ces valeurs dans le second membre de l'égalité précédente. Cela donne, compte tenu de (III.A.38) :

$$L_{1k}^{g',g} = \frac{\frac{\lambda_m^g}{3} (K_m^{g2} - K_m^{g'2}) - \frac{\Sigma_{au_k}^g \gamma_{uk}^g}{k_g^{g'}} K_O(K_m^g c) + O(K_m^{g4})}{\frac{\Sigma_{au_k}^g \gamma_{uk}^g}{k_g^{g'}} - \frac{\Sigma_{am}^g K_1(K_m^g c)}{K_m^g}}$$

Il n'est pas difficile de montrer que :

$$\frac{1}{k_g^g} = \frac{(K_m^{g2} - K_m^{g'2})}{3} \lambda_m^g + O(K_m^{g4})$$

On en déduit que :

suite page suivante.

suite du renvoi de la page précédente.

$$L_{1k}^{g',g} = \frac{1 - \sum_{au_k}^g \gamma_{uk}^g K_0(K_m^g c) + O(K_m^{g^2})}{\sum_{au_k}^g \gamma_{uk}^g \frac{\sum_{am}^g K_1(K_m^g c)}{K_m^g}}$$

On remplace γ_{uk}^g par sa valeur tirée de (III.C.2). On obtient immédiatement :

$$L_{1k}^{g',g} = 3 \Lambda_k^g + O(K_m^{g^2} \ln K_m^g)$$

Pour obtenir (Z.7), il suffit de remplacer $\gamma_k^{g',g}$ dans (Z.5) par son expression (III.C.6).

Manuscrit reçu le 28 juillet 1971

2

Leuberg

